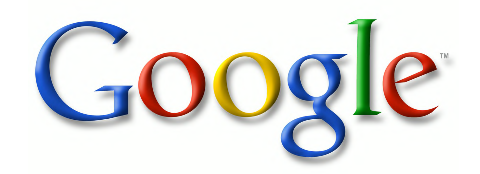
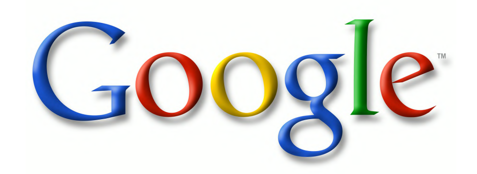
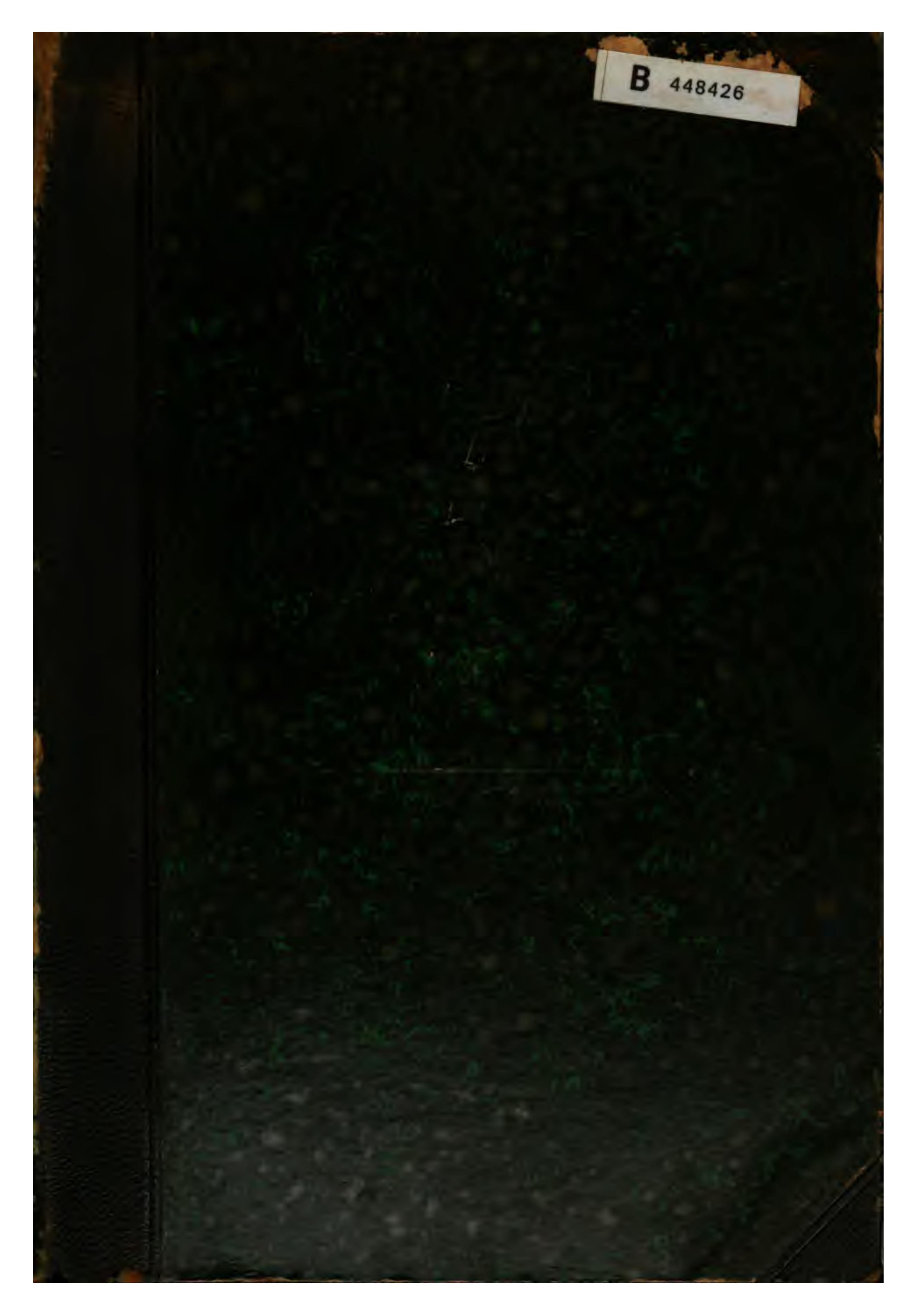
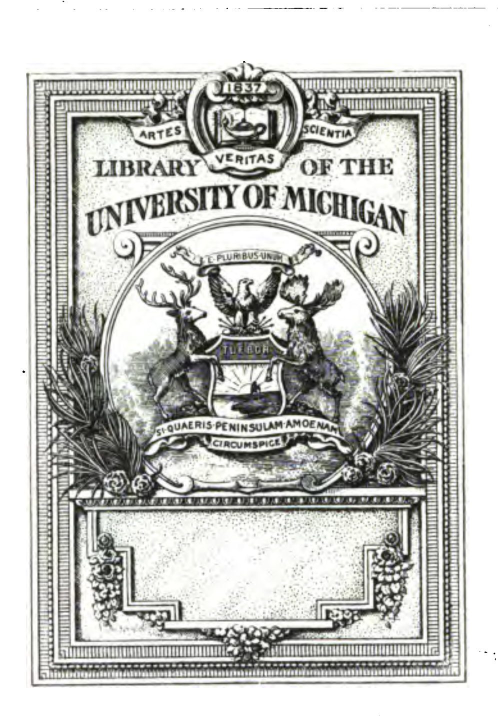
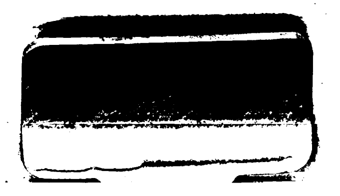





B 448426




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Vorträge

über

Elasticitäts-Lehre

als Grundlage für die

Festigkeits-Berechnung der Bauwerke

von

Wilh. Keck,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Hannover.
Helwing'sche Verlags-Buchhandlung
1893.

Vorwort.

Das vorliegende Buch enthält im Wesentlichen dasjenige, was als das Lehrfach „Elasticitätslehre“ im zweiten Studienjahr an der Technischen Hochschule zu Hannover vorgetragen wird. Das Hauptgewicht ist hierbei auf Leichtverständlichkeit und Anschaulichkeit gelegt; daher wird fast durchweg mit einfachen Sonderfällen, die dem Vorstellungs-Vermögen des Studirenden nahe liegen, begonnen und dann erst zu verwickelteren Aufgaben übergegangen. Ganz allgemeine Untersuchungen sind überhaupt vermieden, da diese Vorträge besonders die Einführung in die Elasticitätslehre bezwecken. In den Beispielen haben solche Fälle vorwiegende Berücksichtigung gefunden, die in den Baufächern von Wichtigkeit sind.

Die graphische Statik kann in Folge besonderer Umstände in meinen mündlichen Vorträgen über Elasticitätslehre nicht benutzt werden, (abgesehen von den einfachsten Grundbegriffen); vielmehr erfolgt die zeichnerische Behandlung der Balken, Fachwerke, Stützmauern und Gewölbe in einem getrennten Lehrfache. Aus diesem Grunde habe ich auch im vorliegenden Buche die graphische Statik nicht in gröfserem Umfange verwendet, weil ich zu Gunsten meiner Hörer wesentliche Abweichungen zwischen den mündlichen und den gedruckten Vorträgen vermeiden wollte.

Die Bedeutung der in den Formeln vorkommenden Buchstaben findet sich am Schlusse des Buches in alphabetischer Ordnung angegeben, u. zw. unter Hinweis auf diejenigen Stellen, wo die betreffende Gröfse in die Entwickelung eingeführt wurde. Mit Hülfe dieses Verzeichnisses kann der Leser jede Formel leicht verstehen, ohne erst im Texte nach der Bedeutung der einzelnen Zeichen suchen zu müssen.

Die neueren einschlägigen Arbeiten wurden benutzt, soweit es dem Plane des Buches entsprach; dabei sind die betreffenden Quellen angeführt. Erschöpfende Quellennachweise für das ganze Gebiet der behandelten Wissenschaft habe ich aber nicht gegeben, weil dies dem Hauptzwecke des Buches nicht zu entsprechen schien.

Hannover, im März 1893.

Keck.

Inhalt.

Seite.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Sätze über Spannung und Formänderung.

Zweiter Abschnitt.

Biegung gerader Stäbe, Balken oder Träger.

Dritter Abschnitt.

Berücksichtigung der Schubspannungen in einem prismatischen, auf Biegung beanspruchten Stabe oder Balken.

Seite.

Vierter Abschnitt.

Einfluss beweglicher Belastung auf einen einfachen Balken mit 2 Stützen.

Fünfter Abschnitt.

Träger überall gleichen Querschnittes auf beliebig vielen Stützen.

Sechster Abschnitt.

Durchgehende Träger mit Gelenken, Gerber'sche Träger.

Siebenter Abschnitt.

Besondere Formen des vollwandigen Trägers auf zwei Stützen.

Achter Abschnitt.

Druckbelastung eines prismatischen Stabes in der Richtung seiner Achse.

Neunter Abschnitt.

Einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

Seite.

Zehnter Abschnitt.

Bogenträger mit drei Gelenken.

Elfter Abschnitt.

Bogenträger mit 2 Kämpfergelenken.

Zwölfter Abschnitt.

Sätze der Formänderungs-Arbeit.

Dreizehnter Abschnitt.

Bogenträger ohne Gelenke.

Vierzehnter Abschnitt.

Erddruck und Stützmauern.

Fünfzehnter Abschnitt.

Tonnengewölbe.

Seite.

Einleitung.

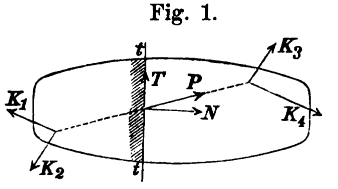
Die Elasticitätslehre untersucht die Formänderungen, welche elastisch feste Körper unter Einwirkung äufserer Kräfte erfahren, sowie die inneren Spannkräfte, welche dabei in den Körpern auftreten.

In dem Folgenden wird durchweg ein Gleichgewichtszustand vorausgesetzt, d. h. es wird angenommen, dass der untersuchte Körper in Ruhe, oder im Zustande einer geradlinig gleichförmig fortschreitenden Bewegung sei.

In Wirklichkeit sind freilich die zu berechnenden Bauverbände durchaus nicht immer im Gleichgewichte. Es erfahren z. B. die Theile eines Gebäudes durch den Sturm, durch den menschlichen Verkehr zeitweise Erschütterungen, wobei sie in Schwingungen gerathen. Ebenso führen auch die Theile einer Brücke schwingende Bewegungen aus, wenn sie von Fuhrwerken befahren werden. Solche Schwingungen sind offenbar Abweichungen vom Gleichgewichtszustande, die einzelnen Körperpunkte erfahren Beschleunigungen und Verzögerungen. Sehr erheblich sind die Beschleunigungen, welche unter Umständen bei beweglichen Maschinentheilen vorkommen. Nur in seltenen Fällen aber ist es möglich, diese Bewegungszustände bei der Untersuchung der elastischen Formänderungen und inneren Spannungen unmittelbar zu berücksichtigen; man muss die betreffenden Bau- und Maschinentheile meist auf Gleichgewicht berechnen und sucht der Abweichung von der Wirklichkeit mittelbar (bei der Festsetzung der Zahl für die sog. zulässige Anstrengung) Rechnung zu tragen.

Ein elastisch fester Körper sei unter Einwirkung äufserer Kräfte im Gleichgewichte; dann müssen sämmtliche Theile desselben im Gleichgewichte sein. Denkt man sich durch den Körper (Fig. 1) eine Schnittebene tt gelegt und betrachtet den einen Abschnitt, z. B. den linksseitigen, so muss den äufseren Kräften K_1 und K_2 durch innere Spannkräfte an der Schnittstelle das Gleichgewicht gehalten

Fig. 1.



werden. Die **Resultirende** P aller dieser inneren Spannkräfte kann man nun stets finden, da sie der Mittelkraft aus K_1 und K_2 genau entgegengesetzt sein muss. Man zerlegt P in die Normalkraft N (rechtwinklig zum Schnitt) und die Tangentialkraft T (in der Ebene des Schnittes liegend); N ist dann die Mittelkraft der an der Schnittfläche auftretenden inneren Zug- und Druckkräfte, T die Resultirende aller Abscheerungs- oder Schubwiderstände. Von besonderer Wichtigkeit ist nun die Kenntnis der Gesetze, nach denen sich die inneren Kräfte über die Schnittfläche vertheilen.

Auf ein unendlich kleines Flächentheilchen dF der Schnittebene komme eine innere Kraft dP, dann ist $dP:dF = p$ die (auf die Flächeneinheit bezogene) **Spannung**. Weicht dieselbe von der Normalen zur Schnittebene um den Winkel φ ab, so lässt sie sich zerlegen in die **Normalspannung** $\sigma = p \cos \varphi$ und die **Schubspannung** $\tau = p \sin \varphi$.

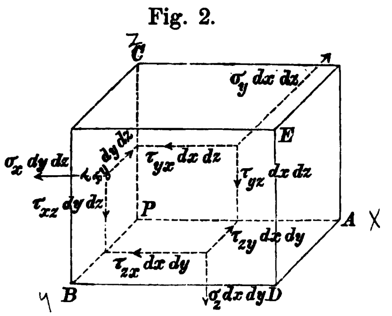
Erster Abschnitt.

Allgemeine Sätze über Spannung und Formänderung.

I. Spannungen in einem Punkte eines Körpers.

Wird aus einem Körper ein rechtwinkliges Parallelepiped herausgeschnitten von den Seiten dx, dy, dz, so wirkt an jeder Seitenebene eine Spannkraft, welche nach den 3 Achsenrichtungen in 3 Seitenkräfte zerlegt werden kann. Die zur x-Achse rechtwinklig stehende Fläche BPC (Fig. 2) erfahre eine resultirende Spannung p_x (f. d. Flächeneinheit), also eine Spannkraft $p_x\, dy\, dz$. Bei rechtwinkliger Zerlegung zerfällt p_x in eine Normalspannung σ_x und zwei in die Fläche BPC fallende Seitenkräfte, also Schubspannungen, τ_x, die zur Unterscheidung τ_{xy} und τ_{xz} genannt werden sollen, weil sie der y-Achse bezw. der z-Achse parallel sind. Demnach erhält man an der Fläche BPC die in der Figur angegebenen Kräfte.

Fig. 2.



Die Fläche APC erfahre die Spannung p_y, welche entsprechend in σ_y, τ_{yx} und τ_{yz} zerlegt werde, die Fläche APB die Spannung p_z mit den Seitenkräften σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}; die Spannkräfte selbst sind in der Figur angegeben. An den 3 gegenüber liegenden Flächen sind die entsprechenden, aber partiell gewachsenen Spannungen in entgegengesetzter Richtung anzubringen. Die Spannungen sind nämlich je nach der Lage des Punktes P im Körper verschieden, sind mithin Funktionen von x, y und z; geht man also von der Seitenfläche BPC auf die parallele Fläche ADE über, so hat sich σ_x partiell nach x geändert, hat um $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dx$ zugenommen. (Die Spannkräfte an

den 3 im Punkte E zusammentreffenden Flächen sind, der Deutlichkeit wegen, in der Figur fortgelassen.)

Schliefslich möge auf das Körpertheilchen noch eine mit der Masse, also auch dem Rauminhalte $dx\,dy\,dz$ proportionale Kraft, eine sog. Massenkraft, wirken, z. B. die Schwerkraft, welche in den 3 Achsenrichtungen die Seitenkräfte $X dx\,dy\,dz$, $Y dx\,dy\,dz$, $Z dx\,dy\,dz$ liefert. — Es müssen nun die sämmtlichen Kräfte den Gleichgewichts-Bedingungen genügen.

Legt man durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds 3 Achsen parallel den Kanten, so muss die Momentensumme der Kräfte in Bezug auf jede Achse gleich Null sein. In Bezug auf die der X-Richtung parallele Achse haben aber die mit der Achse in einer Ebene liegenden Kräfte kein Moment, es werden daher in dieser Momenten-Gleichung nur die in Fig. 3 angegebenen Kräfte vorkommen. Unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Gröfsen vierter Ordnung entsteht dann

Fig. 3.

$\left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dx\,dy$

$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dx\,dz$

$\tau_{yz} dx\,dz$

$\tau_{zy}\,dx\,dy$

$$\tau_{yz}\,dx\,dz\,dy = \tau_{zy}\,dx\,dy\,dz, \quad \text{mithin} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}\,.$$

In gleicher Weise erhält man in Bezug auf die beiden anderen Drehachsen

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}\,.$$

Ein Blick auf Fig. 2 lehrt aber, dass τ_{yz} und τ_{zy} beide die x-Kante PA rechtwinklig schneiden und dass ihre Pfeilspitzen beide nach dieser Kante hinweisen; es werden daher diese gleichen Schubspannungen zweckmäfsig nach dieser x-Kante als τ_x bezeichnet. Ebenso wird kürzer

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$$

geschrieben. Man hat hiernach den Satz:

Diejenigen Schubspannungen, welche dieselbe Kante des unendlich kleinen Parallelepipeds rechtwinklig schneiden, sind einander gleich und haben gegen diese Kante übereinstimmende Pfeilrichtung.

Man lege nun durch die Punkte A, B und C des Parallelepipeds (Fig. 2) eine Ebene und schneide dadurch ein Tetraëder $PABC$ ab (Fig. 4). Die Normale N zu der schrägen Ebene ABC, die in Fig. 5 noch besonders dargestellt ist, bilde mit den 3 Achsen die Winkel α, β, γ, die Ebene selbst also mit den zu den Achsen rechtwinkligen Ebenen dieselben Winkel. Bezeichnet man die Fläche ABC mit dF, so ist hiernach (Fig. 4) $BPC = dF\cos\alpha$, $APC = dF\cos\beta$, $APB = dF\cos\gamma$. An diesen drei Ebenen treten nach dem Vorigen die resultirenden (schief gerichteten) Spannungen p_x, p_y und p_z, mithin die Spannkräfte $p_x\,dF\cos\alpha$, $p_y\,dF\cos\beta$ und $p_z\,dF\cos\gamma$ auf. Die Spannung an ABC aber werde p genannt, liefert also die Spannkraft $p\,dF$ und habe die Richtungswinkel λ, μ, ν. Diese 4 Flächenkräfte müssen unter sich allein im Gleichgewichte sein, da sie unendlich klein zweiter Ordnung sind, gegen welche die aufserdem noch wirkende Massenkraft als unendlich klein dritter Ordnung verschwindet. An dem Gleichgewichtszustande wird aber durch Fortlassung des gemeinsamen Faktors dF nichts geändert, so dass auch die Spannungsgröfsen

Fig. 4.

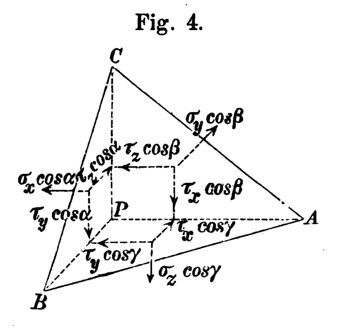
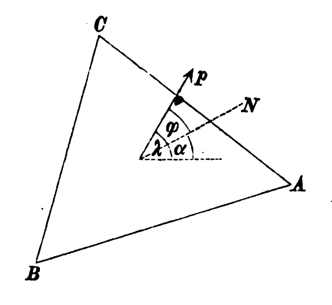


Fig. 5.



$$p, \quad p_x\cos\alpha, \quad p_y\cos\beta \quad \text{und} \quad p_z\cos\gamma$$

im Gleichgewichte sein müssen. Führt man aber für p_x, p_y und p_z die einzelnen Normal- und Tangential-Spannungen ein (Fig. 4) und zerlegt p in $p\cos\lambda$, $p\cos\mu$ und $p\cos\nu$, so entstehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p\cos\lambda &= \sigma_x\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma \\ p\cos\mu &= \tau_z\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_x\cos\gamma \\ p\cos\nu &= \tau_y\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad 1$$

Verschiebt man das Dreieck ABC parallel nach dem Punkte P, so ändert sich dadurch die Spannung p an ABC nur unendlich

wenig. Wenn man nun die Spannungen p_x, p_y und p_z der drei im Punkte P sich rechtwinklig schneidenden Seitenebenen kennt (also auch deren Seitenkräfte), so ist durch die Gleichungen 1 auch die Spannung p an der beliebig geneigten Ebene durch denselben Punkt als Funktion der Neigungswinkel α, β und γ der Ebene nach Gröfse und Richtung bestimmt, weil zu den obigen 3 Gleichungen noch die vierte:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

für die 4 Unbekannten p, λ, μ und ν hinzutritt.

II. Spannungs-Ellipsoid.

Das Gleichgewicht zwischen den Spannungen p, $p_x \cos\alpha$, $p_y \cos\beta$ und $p_z \cos\gamma$ führt zu einer einfachen geometrischen Darstellung der Spannung p an einer beliebigen Schnittebene in dem Körperpunkte P. Kehrt man nämlich die 3 letzten Kräfte ihrer Pfeilrichtung nach um, so wird p deren Mittelkraft. Sind also die (schiefen) Spannungen p_x, p_y und p_z für 3 zu einander rechtwinklig stehende Ebenen durch einen Punkt P nach Richtung und Gröfse bekannt und ist durch denselben Punkt P eine Ebene gelegt, deren Normale mit den Achsen die Winkel α, β und γ bildet, so lege man durch P drei Gerade in den Richtungen von p_x, p_y und p_z (die im Allgemeinen schiefwinklig zu einander sind) und trage auf diesen Geraden (in entgegengesetzter Richtung mit den Spannungen) die Gröfsen $p_x \cos\alpha$, $p_y \cos\beta$ und $p_z \cos\gamma$ von P aus als Längen auf; wird dann aus diesen 3 Seiten ein Parallelepiped konstruirt (Fig. 6), so ist die Diagonale PQ desselben die Spannung p der beliebigen Ebene nach Gröfse und Richtung. Aendern sich die Richtungswinkel α, β und γ der schiefen Ebene, so bleiben die Richtungen der Parallelepiped-Seiten unverändert, es ändern sich aber die Längen derselben $p_x \cos\alpha$, $p_y \cos\beta$ und $p_z \cos\gamma$ und dadurch auch Richtung und Gröfse der Diagonalen $PQ = p$. Dreht sich die schiefe Ebene um den Punkt P, so dass sich α, β und γ stetig ändern, so beschreibt der Endpunkt Q der Strecke p eine Fläche. Bezieht man diese auf das schiefwinklige Achsenkreuz der Richtungen von p_x, p_y und p_z und bezeichnet die

Fig. 6.

Koordinaten des Flächenpunktes Q mit X, Y und Z, so ist offenbar

$$p_x \cos\alpha = X, \quad \text{oder} \quad \cos\alpha = \frac{X}{p_x},$$

$$p_y \cos\beta = Y, \quad \text{oder} \quad \cos\beta = \frac{Y}{p_y},$$

$$p_z \cos\gamma = Z, \quad \text{oder} \quad \cos\gamma = \frac{Z}{p_z}.$$

Da aber α, β und γ die Richtungswinkel der Normalen N der Schnittebene gegen die 3 rechtwinkligen (bisherigen) Achsen sind, so ist

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{X^2}{p_x^2} + \frac{Y^2}{p_y^2} + \frac{Z^2}{p_z^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoides, bezogen auf die 3 konjugirten Halbmesser p_x, p_y und p_z; folglich hat man den Satz:

Denkt man sich die Spannung p im Punkte P für alle möglichen, durch diesen Punkt gelegten Schnittebenen nach Gröſse und Richtung aufgetragen, so liegen die Endpunkte der Strecke p auf dem Spannungs-Ellipsoide mit dem Mittelpunkte P; die Spannungen p_x, p_y und p_z an 3 zu einander rechtwinkligen Ebenen sind konjugirte Halbmesser des Ellipsoides. Umgekehrt müssen je 3 konjugirte Halbmesser des letzteren immer die Spannungen an 3 zu einander rechtwinkligen Schnittebenen sein.

III. Normal-Spannung an einer beliebigen Schnittebene. Hauptspannungen.

Bildet die Spannung p einer beliebigen Ebene mit der Normalen N derselben den Winkel φ (Fig. 5), so ist $\sigma = p\cos\varphi$ die mit dieser Rechtwinkligen parallele Normalspannung der Ebene. Die Richtungswinkel der Geraden N waren α, β und γ, diejenigen von p waren λ, μ und ν, es gilt daher für den Winkel φ zwischen N und p:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

Hiernach wird

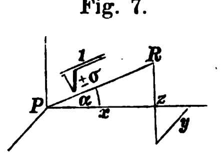
$$\sigma = p\cos\lambda\cos\alpha + p\cos\mu\cos\beta + p\cos\nu\cos\gamma.$$

Führt man aus Gl. 1 (S. 5) die Werthe für $p \cos \lambda$, $p \cos \mu$ und $p \cos \nu$ hier ein, so entsteht nach entsprechender Ordnung

$$1) \qquad \sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\,\tau_x \cos\beta \cos\gamma + 2\,\tau_y \cos\alpha \cos\gamma + 2\,\tau_z \cos\alpha \cos\beta\,.$$

Auch diese Gleichung kann geometrisch dargestellt werden; jedoch empfiehlt es sich, von dem Punkte P aus auf der Normalen N nicht den Werth σ selbst aufzutragen, sondern statt dessen $1 : \sqrt{\sigma}$ bei positiver Normalspannung, $1 : \sqrt{-\sigma}$ aber bei negativer Normalspannung, allgemein also $1 : \sqrt{\pm \sigma}$ (Fig. 7). Bezieht man den Endpunkt R dieser aufgetragenen Strecke auf das ursprüngliche, rechtwinklige Achsenkreuz, mit denen σ, also auch PR die Winkel α, β und γ bildet, so sind die Koordinaten des Endpunktes R:

Fig. 7.



$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\pm \sigma}}; \quad y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\pm \sigma}}; \quad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\pm \sigma}},$$

oder es ist

$$\cos\alpha = x\sqrt{\pm \sigma}; \quad \cos\beta = y\sqrt{\pm \sigma}; \quad \cos\gamma = z\sqrt{\pm \sigma}.$$

Setzt man diese Werthe für $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ in obige Gl. 1 ein, so entsteht nach Aufhebung des gemeinsamen Faktoren σ

$$\pm 1 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\,\tau_x yz + 2\,\tau_y xy + 2\,\tau_z xy.$$

Diese Gleichung bedeutet eine Fläche zweiten Grades mit dem Mittelpunkte P. Eine solche Fläche hat aber stets 3 im Punkte P sich rechtwinklig schneidende Hauptachsen; wählt man diese zu Koordinaten-Achsen, so erhält man bekanntlich eine Gleichung der Fläche, in welcher die Glieder mit den doppelten Produkten der Koordinaten ($2\,\tau_x yz$ usw.) nicht vorkommen. Denkt man sich daher das ursprüngliche Achsenkreuz so verdreht, dass es mit dem Hauptachsen-Kreuze zusammenfällt, so müssen die Koëfficienten der 3 letzten Glieder der Gleichung, d. h. die Schubspannungen τ_x, τ_y und τ_z, zu Null werden, oder es müssen die Spannungen p_x, p_y und p_z an den 3 Ebenen der Hauptachsen reine Normalspannungen sein, folglich auch zu einander rechtwinklig stehen. Hieraus ergiebt sich der Satz:

In jedem Punkte eines Körpers giebt es 3 zu einander rechtwinklig stehende Ebenen, an denen keine Schubspannungen, sondern nur reine Normalspannungen

auftreten. Diese Spannungen heifsen die *Hauptspannungen* des Punktes P und werden mit σ_1, σ_2 und σ_3 bezeichnet. Dieselben müssen im Spannungs-Ellipsoide als 3 *rechtwinklig* zu einander stehende Fahrstrahlen vorkommen; da sie aber auch die Spannungen an 3 rechtwinklig zu einander stehenden Ebenen bedeuten, so müssen sie zugleich *konjugirte* Halbmesser, mithin die halben *Hauptachsen* des Spannungs-Ellipsoides sein, da es nur dieses eine System *rechtwinkliger* konjugirter Halbmesser giebt. Hieraus folgt der weitere Satz:

Die Hauptspannungen (welche reine Normalspannungen sind) bilden die halben Hauptachsen des Spannungs-Ellipsoides und enthalten als solche die gröfste und die kleinste Spannung an einem Punkte P.

In einem vollkommen flüssigen Körper giebt es im Gleichgewichtszustande bekanntlich nur *Normalspannungen.* Daher sind in dem Spannungs-Ellipsoide für einen Punkt einer solchen Flüssigkeit sämmtliche Achsen *Hauptachsen*; das Ellipsoid wird demnach zu einer Kugel, und es folgt auch daraus das bekannte Ergebnis, dass die Spannungen nach allen Richtungen von gleicher Gröfse sind.

Die Gleichungen für den Spannungszustand im Punkte P werden einfacher, wenn man die Richtungen der Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 zu Koordinatenachsen wählt. Die Spannung p an der beliebigen Schnittebene wird dann (vergl. Fig. 6) die Mittelkraft aus 3 *rechtwinklig* zu einander stehenden Seitenkräften $\sigma_1 \cos\alpha$, $\sigma_2 \cos\beta$, $\sigma_3 \cos\gamma$, also wird

$$p^2 = \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_2^3 \cos^2\gamma .$$

Wird nun eine der 3 Hauptspannungen, z. B. σ_3, *gleich Null*, so wird p die Mittelkraft aus $\sigma_1 \cos\alpha$ und $\sigma_2 \cos\beta$ (Fig. 8), fällt daher in die Ebene der σ_1 und σ_2 und bekommt den Werth

Fig. 8.

$$p = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta} .$$

Das Spannungs-Ellipsoid verwandelt sich, da die Halbachse σ_3 zu Null wird, in eine ebene Fläche, welche durch eine Ellipse der Halbachsen σ_1 und σ_2, die *Spannungs-Ellipse*, begrenzt ist. Der Endpunkt der aufgetragenen Spannung p liegt nun im Allgemeinen im Innern der Ellipsenfläche. Setzt man nämlich in der Ellipsen-Gleichung

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$x = \sigma_1 \cos\alpha$ (der Seitenkraft von p), so wird $y = \sigma_2 \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, wofür man, wegen $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ auch

$$y = \sigma_2 \sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

setzen kann. Die Ellipsen-Ordinate wird mithin im Allgemeinen gröfser als die Seitenkraft $\sigma_2 \cos\beta$ von p. Beide stimmen nur überein, oder der Endpunkt von p liegt auf der Spannungs-Ellipse selbst, wenn $\cos\gamma = 0$, d. h. wenn die Schnittebene rechtwinklig zu der Ebene der noch vorhandenen Hauptspannungen σ_1 und σ_2, also rechtwinklig zur Ebene der Spannungs-Ellipse steht.

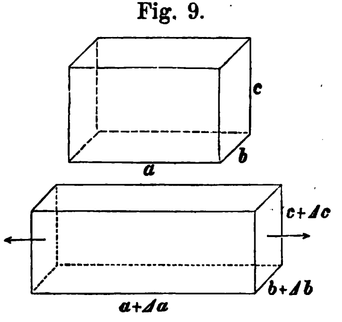
Sind 2 Hauptspannungen σ_2 und σ_3 gleich Null, so wird die Spannung p an einer beliebigen Schnittebene gleichwerthig mit $\sigma_1 \cos\alpha$, fällt daher in die Richtung der Hauptspannung σ_1. Das Spannungs-Ellipsoid wird nun zu einer geraden Linie. Die Spannung p wird (selbstverständlich) gleich σ_1, wenn $\cos\alpha = 1$ wird, d. h. wenn die Normale zur Schnittebene in die Richtung von σ_1 fällt.

IV. Formänderung durch Normal-Spannungen.

Wirkt an zwei gegenüber liegenden Endflächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds der Seiten a, b, c (Fig. 9) eine gleichmäfsig über die Flächen vertheilte Normalspannung σ_x f. d. Flächeneinheit, so entspricht dieser im Gleichgewichtszustande, der Erfahrung gemäfs, eine elastische Verlängerung Δa in der Richtung a der Spannung σ_x, und es ist innerhalb der sog. Elasticitätsgrenze

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\sigma_x}{E},$$

Fig. 9.



wo E die Elasticitätsziffer. $\Delta a : a$ heifst die Dehnung in der Richtung von σ_x und werde mit ε_x bezeichnet. In den Richtungen der anderen beiden Kanten erfolgen aber gleichzeitig Verkürzungen, welche als negative Querdehnungen aufgefasst werden, u. zw. ist

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{\sigma_x}{C_1}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta c}{c} = -\frac{\sigma_x}{C_2}.$$

C_1 und C_2 sind die Ziffern der Quer-Elasticität. Die Gröfsen E, C_1 und C_2 werden für Zug und Druck gleich angenommen. Im Allgemeinen sind sie an verschiedenen Stellen eines Körpers, besonders aber nach verschiedenen Richtungen verschieden (z. B. bei Holz wegen des faserigen Gefüges); hier sollen aber völlig isotrope Körper vorausgesetzt werden, so dass man E, C_1 und C_2 für einen bestimmten Körper als unveränderlich ansehen kann. Dann ist auch $C_2 = C_1$, und man kann

$$C_2 = C_1 = m\,E$$

setzen, wobei m nach Versuchen zwischen 3 und 4 schwankt, für Schmiedeisen aber zu 4 angenommen werden kann.*) Letzterer Werth soll bei Zahlenrechnungen im Folgenden stets benutzt werden. Eine Spannung σ_x bringt also neben der Längsdehnung

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

noch die Querdehnungen

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\sigma_x}{m\,E}\left(= -\frac{1}{4}\,\varepsilon_x\right) \quad \text{hervor.}$$

Wirken nun an allen Seitenflächen des Parallelepipeds Normal-Spannungen, u. zw. in den 3 Richtungen bezw. σ_x, σ_y und σ_z, so entsteht in der X-Richtung:

durch σ_x die Längsdehnung $\frac{\sigma_x}{E}$,

durch σ_y die Querdehnung $-\frac{\sigma_y}{m\,E}$,

durch σ_z ebenfalls die Querdehnung $-\frac{\sigma_z}{m\,E}$,

daher die gesammte Dehnung

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right);$$

ebenso in den anderen Richtungen:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}\right);$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right). \qquad 1$$

*) Eingehende Erörterungen über die Gröfse m findet man in Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit, zweite Auflage, Berlin 1878, S. 30 u. ff., sowie in Winkler, Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag 1867, S. 18—30.

V. Formänderung durch Schubspannungen.

An einem rechtwinkligen Parallelepiped von dem quadratischen Querschnitt $a \times a$ und einer Länge $= 1$ rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 10) mögen in den Richtungen parallel zu den Kanten a an den 4 Seitenflächen von der Gröfse $a \cdot 1$ gleichmäfsig vertheilte Schubspannungen τ wirken, so dass auf jede Seitenfläche eine Schubkraft $a\,\tau$ kommt. Führt man nun einen Schnitt nach AC und betrachtet den Abschnitt ACD (Fig. 11), so verlangt das Gleichgewicht eine normale Druckkraft an der Schnittfläche AC von der Gröfse $a\,\tau \sqrt{2}$, welche durch die Mitte von AC geht und daher über diese Fläche $AC = a\sqrt{2}$ gleichmäfsig vertheilt angesehen werden kann, so dass an AC eine reine Druckspannung τ (f. d. Flächeneinheit) auftritt. An dem Schnitte BD verlangt das Gleichgewicht in derselben Weise eine reine Zugspannung von derselben Gröfse τ (Fig. 12).

Fig. 10.

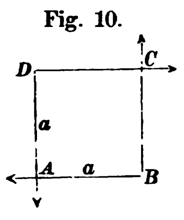


Fig. 11.

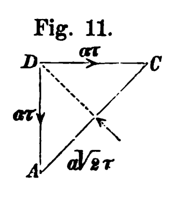
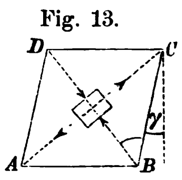


Fig. 12.

Diese beiden Normalspannungen sind nach dem Früheren Hauptspannungen; die dritte Hauptspannung, rechtwinklig zur Bildebene, ist in diesem Falle gleich Null. Aus dem Spannungs-Ellipsoide wird hier eine Spannungs-Ellipse, u. zw. mit gleichen Hauptachsen, mithin ein Spannungskreis vom Halbmesser τ. Die Spannungen an allen Schnittflächen rechtwinklig zur Bildebene haben den gleichen Werth τ, sind aber für 2 Schnittrichtungen reine Normalspannungen, für 2 andere reine Schubspannungen, für alle übrigen schiefe Spannungen.

Da in der Richtung der Diagonalen AC reine Zugspannung, in der Richtung der anderen reiner Druck von gleicher Gröfse stattfindet, so werden beide Diagonalen (von der Länge d) Längenänderungen $+\Delta d$ bezw. $-\Delta d$ erfahren; die Seiten des Quadrates aber, in deren Richtungen keine Normalspannungen vorkommen, werden ihre Länge a behalten. Es wird daher aus dem Quadrat ein Rhombus (dessen Diagonalen sich rechtwinklig schneiden) (Fig. 13). Die Aenderung γ des

Fig. 13.



rechten Winkels heifst Gleitung. Zur Berechnung derselben bedenke man, dass

$$\operatorname{tg} DBC = \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{{}^1/_2\, AC}{{}^1/_2\, BD} = \frac{d + \Delta d}{d - \Delta d};$$

weil aber γ als klein angenommen wird, so kann man

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} 45^0 + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} 45^0 \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \frac{\Delta d}{d}}{1 - \frac{\Delta d}{d}}$$

setzen, so dass $\gamma = 2\,\frac{\Delta d}{d}$ wird. Zu der Dehnung in der Richtung AC liefert aber die Zugspannung τ den Beitrag $\frac{\tau}{E}$, die Druckspannung τ (rechtwinklig dazu) den Beitrag $\frac{\tau}{mE}$; es wird daher

1) $$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\tau}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right), \text{ also}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{E}\, 2\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

2) Man setzt nun $$\frac{E}{2\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = G$$ und nennt diese Gröfse den Gleitmodul des betr. Stoffes, so dass dann einfach

3) die Gleitung $$\gamma = \frac{\tau}{G}$$ erscheint.

Für $m = 4$ wird die Dehnung in der Richtung der Diagonalen $\varepsilon = \pm\frac{5}{4}\frac{\tau}{E}$, $G = 0{,}4\,E$.

Wirken nicht nur rechtwinklig zu einer Kantenrichtung, sondern gleichzeitig rechtwinklig zu allen drei Kantenrichtungen eines rechtwinkligen Parallelepipeds an dessen Flächen die Schubspannungen τ_x, τ_y und τ_z, so treten in allen drei Projektionen die entsprechenden Gleitungen

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}; \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}; \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad \text{ein.}$$

VI. Formänderung eines Parallelepipeds unter Einwirkung beliebiger Spannungen.

Wirken an den Flächen des Parallelepipeds sowohl Normal-, wie auch Schubspannungen, so treten die sämmtlichen Form-

änderungen gleichzeitig auf, welche den einzelnen Einwirkungen entsprechen. Die Normalspannungen bewirken die nach Gl. 1, S. 11 zu berechnenden Dehnungen, die Schubspannungen aber die nach dem Vorstehenden zu ermittelnden Gleitungen, wodurch die rechten Winkel in schiefe Winkel übergehen.

VII. Formänderung einer unendlich kleinen Kugel im Inneren eines Körpers.

Denkt man sich um den Körperpunkt P eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Halbmesser ds beschrieben und sind PA, PB, PC 3 rechtwinklig zu einander stehende Halbmesser (Fig. 14), so gehen diese bei der elastischen Formänderung über in P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1, ändern sich der Länge nach in den Verhältnissen ε_x, ε_y, ε_z und verdrehen sich gegen einander um γ_x, γ_y, γ_z. Ein Punkt Q der Kugelfläche hatte in Bezug auf die 3 Halbmesser die Gleichung

Fig. 14.

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}=1.$$

Derselbe Körperpunkt habe nach der Formänderung die Lage Q_1 und werde auf das schiefwinklig gewordene Achsenkreuz P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1 bezogen (Fig. 15). Sind dx_1, dy_1 und dz_1 die Koordinaten von Q_1, so ist in Folge der Dehnung

Fig. 15.

$$dx_1 = dx(1+\varepsilon_x), \quad \text{also} \quad dx=\frac{dx_1}{1+\varepsilon_x}$$

und ebenso

$$dy=\frac{dy_1}{1+\varepsilon_y}; \qquad dz=\frac{dz_1}{1+\varepsilon_z}.$$

Dies giebt, in die Kugelgleichung eingesetzt:

$$\frac{dx_1^2}{ds^2(1+\varepsilon_x)^2}+\frac{dy_1^2}{ds^2(1+\varepsilon_y)^2}+\frac{dz_1^2}{ds^2(1+\varepsilon_z)^2}=1.$$

Dies ist aber die Gleichung eines Ellipsoides in Bezug auf konjugirte Halbmesser, und es folgt der Satz:

Eine unendlich kleine Kugel wird durch die elastische Formänderung zu einem Ellipsoide, wobei ursprünglich zu einander rechtwinklige Durchmesser in konjugirte Durchmesser übergehen.

Die 3 Hauptachsen dieses Ellipsoides sind ebenfalls konjugirte Durchmesser, standen also vor der Formänderung rechtwinklig zu einander; da sie nun diese gegenseitige Richtung beibehalten haben, so stellen sie dasjenige Achsenkreuz dar, welches keine Winkeländerung, keine Gleitung erfahren hat. Die Dehnungen nach diesen Richtungen seien

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3$$

und heifsen Hauptdehnungen, es muss unter ihnen nothwendig die gröfste und die kleinste Dehnung im Bereiche der kleinen Kugel vorkommen.

Denkt man sich aber im Körperpunkte P ein kleines Parallelepiped, dessen Seiten die Richtungen der Hauptspannungen haben, so wirken an dessen Seitenflächen keine Schubspannungen; es bleibt daher dieses Parallelepiped rechtwinklig. In der Kugel können dann aber die 3, in der Richtung der Hauptspannungen liegenden Durchmesser ebenfalls keine Gleitung erfahren, haben also die Eigenschaft, die soeben für die Richtungen der Hauptdehnungen nachgewiesen wurde. Daraus folgt:

Die Achsen des Spannungs-Ellipsoides fallen mit denen des Formänderungs-Ellipsoides zusammen, oder die Hauptdehnungen treten in den Richtungen der Hauptspannungen auf.

VIII. Anstrengung in einem Körperpunkte.

Für die Sicherheit eines elastischen Körpers gegen Zerstörung ist im Allgemeinen nicht eigentlich die stärkste in ihm vorkommende Spannung mafsgebend, sondern vielmehr die stärkste in ihm auftretende (positive oder negative) Dehnung. Ist z. B. die Dehnung ε_1 in der Richtung der ersten Hauptspannung σ_1 die gröfste, so ist

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right).$$

In erster Linie hängt ε_1 freilich von σ_1 ab, wird aber von σ_2 und σ_3 auch beeinflusst, u. zw. vergröfsert, wenn $\sigma_2 + \sigma_3$ entgegengesetztes Vorzeichen mit σ_1 hat.

Der Werth der zulässigen Dehnung wird mit Hülfe von Versuchen ermittelt, bei denen in dem Versuchskörper nur eine

Hauptspannung σ_1 vorkommt, so dass die entsprechende Dehnung

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

wird. Diejenige Spannung $\sigma_1 = E\varepsilon_1$, welche die zulässige Dehnung hervorbringt, nennt man dann die zulässige Anstrengung oder die zulässige Inanspruchnahme. Treten nun in einem Falle der Anwendung 3 Hauptspannungen auf, so wird man dieselbe Sicherheit haben wie in dem einfacheren Versuchsfalle, wenn ε_1 und also auch $E\varepsilon_1$ wieder denselben Werth erreicht. Man nennt daher

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$$

die Anstrengung, und zwar auf Zug, wenn die Dehnung positiv, auf Druck, wenn sie negativ ist. Spannung und Anstrengung sind daher nicht gleichbedeutend, wenn mehrere Hauptspannungen auftreten.

Wird z. B. ein rechtwinkliges Parallelepiped an 4 Seitenflächen von Schubkräften ergriffen (Fig. 10, S. 12), so ist

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = -\tau; \quad \sigma_3 = 0;$$

die stärkste Dehnung (Gl. 1, S. 13)

$$\varepsilon = \pm \frac{\tau}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

die Anstrengung auf Zug und Druck

$$E\varepsilon = \tau\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Nennt man die zulässige Anstrengung s, die entsprechende zulässige Schubspannung t, so ist hiernach

$$t = \frac{s}{1 + \frac{1}{m}} = 0{,}8\, s \quad (\text{für } m = 4)\,.$$

Ist für den fraglichen Körper die zulässige Anstrengung auf Zug bezw. auf Druck verschieden grofs, so ist der kleinere Werth für s einzuführen, und von diesem kleineren Werthe darf die Schubspannung nur $^8/_{10}$ betragen.

Zweiter Abschnitt.

Biegung gerader Stäbe, Balken oder Träger.

I. Voraussetzungen.

Sämmtliche äufsere Kräfte sollen in einer durch die Längenachse des Stabes gehenden Ebene liegen und sollen zugleich rechtwinklig zur Stabachse gerichtet sein. Letztere geht in eine Kurve über, die Biegungslinie, welche im Allgemeinen doppelt gekrümmt ist. Der Inbegriff aller Tangenten an die Biegungslinie bildet die Biegungsfläche. Ist die Biegungslinie einfach gekrümmt, so wird die Biegungsfläche zur Biegungsebene. Eine Gerade, welche in einem Punkte der Biegungslinie rechtwinklig zur Biegungsfläche steht, heifst die Biegungsachse für diesen Punkt.

Behufs der Spannungs-Ermittelung wird angenommen, die Formänderungen seien so klein, dass die Richtungslinien der äufseren und inneren Kräfte sich durch die Formänderung nicht wesentlich verschoben haben, so dass für die Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen die ursprüngliche Form des Stabes zu Grunde gelegt werden kann.

Fig. 16.

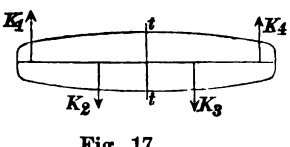
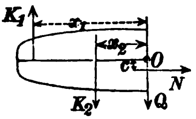


Fig. 17.



Der Stab möge unter Einwirkung der Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 im Gleichgewicht sein (Fig. 16). Führt man nun einen Querschnitt $t - t$ und betrachtet das linksseitige Stück (Fig. 17), so müssen die inneren Kräfte an der Schnittstelle den äufseren Kräften K_1 und K_2 das Gleichgewicht halten. Die inneren Kräfte lassen sich auf eine Normalkraft oder Längskraft N und eine Tangential- oder Querkraft Q zurückführen, welche beide in der Ebene der

äufseren Kräfte liegen müssen. Die Gleichgewichts-Bedingungen sind:

$$Q = K_1 - K_2;$$
$$N = 0;$$
$$Nc = K_1 x_1 - K_2 x_2.$$

Die innere Längskraft N ergiebt sich als eine Kraft von der Gröfse Null, die aber, wegen der letzten Gleichung, in Bezug auf die Achse O doch ein im Allgemeinen von Null verschiedenes Moment

$$M = K_1 x_1 - K_2 x_2,$$

also einen unendlich grofsen Hebelarm c hat. Dieses Ergebnis bedeutet bekanntlich, dass die inneren Längskräfte ein **Kräftepaar** von dem Momente

$$Nc = \text{dem Biegungsmomente } M = K_1 x_1 - K_2 x_2$$

bilden, welches natürlich dem äufseren Momente entgegengesetzt dreht. Aus dem Vorhandensein des inneren **Kräftepaares** folgt. dass die Normal- oder Längsspannungen theils Zug-, theils Druckspannungen sein müssen.

Man kann die äufseren Kräfte K_1 und K_2 links vom Schnitt auch durch ihre Mittelkraft ersetzen. Wird $K_1 > K_2$ gedacht, so liegt die Mittelkraft links von beiden, hat die Gröfse $K_1 - K_2$, übereinstimmend mit der inneren Querkraft Q, aber entgegengesetzte Pfeilrichtnng (aufwärts); diese Mittelkraft ist die **äufsere Querkraft**. Sie bildet mit der inneren Querkraft ein dem Biegungsmomente $M = K_1 x_1 - K_2 x_2$ gleichwerthiges Kräftepaar Qx_0 (Fig. 18), welchem das Moment der Längsspannungen Nc das Gleichgewicht hält.

Fig. 18.

Es ist nun zu untersuchen, nach welchen Gesetzen sich die Normal- und Schubspannungen über den Querschnitt vertheilen. Schneidet man aus dem Stabe ein Längentheilchen von der Länge dx (Fig. 19) und aus diesem wieder ein Höhentheilchen von der Höhe dz heraus, so wirken an den beiden in P sich schneidenden Flächen die Normalspannungen σ_x und σ_z, sowie die gleichen Schubspannungen τ_y. Die äufseren Kräfte seien derartig über die Breite des Stabes vertheilt, dass an Schnitten parallel der Kräfte-Ebene keine Spannungen p_y

Fig. 19.

auftreten; dann sind $\sigma_y = \tau_x = \tau_z = 0$, und das Spannungs-Ellipsoid schrumpft zu einer Spannungs-Ellipse, parallel der Kräfte-Ebene, zusammen.

Die Spannungen σ_z und τ_y sollen erst später untersucht werden. σ_z ist meistens eine unbedeutende Druckspannung, die durch das Aufeinanderpressen der wagerechten Schichten des Stabes in Folge der oben auf dem Stabe angebrachten Lasten und der unten an ihm wirkenden Auflagerdrücke entsteht.

Die Schubspannung τ_y ist freilich nicht ganz so unbedeutend, ist aber doch bei längeren Stäben, namentlich solchen von rechteckigem, rundem, oder sonst ziemlich völligem Querschnitte, für die Tragfähigkeit nicht mafsgebend. Sie soll daher, der Einfachheit wegen, auch einstweilen unberücksichtigt bleiben.

Wir haben dann vorläufig nur mit σ_x zu thun, die nun eine, u. zw. die einzige, Hauptspannung und damit zugleich die Anstrengung ist. (Die Spannungs-Ellipse wird zu einer Geraden, parallel der Achse des Stabes.)

Für die Ermittelung der Spannung σ_x und der entsprechenden Biegung des Stabes ist aber (bekanntlich) das Trägheitsmoment der Querschnittsfigur von Wichtigkeit; es sollen daher zunächst einige wichtige Gesetze über Trägheitsmomente ebener Figuren entwickelt werden.

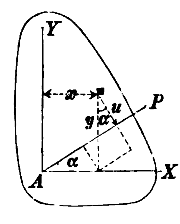
II. Eigenschaften der Trägheitsmomente ebener Flächen in Bezug auf Achsen durch einen festen Punkt.

Durch den Punkt A der gegebenen Fläche F sei ein rechtwinkliges Achsenkreuz gelegt und aufserdem eine Achse AP, die mit AX den veränderlichen Winkel α einschliefst (Fig. 20); dann ist bekanntlich das Trägheitsmoment der Fläche F in Bezug auf AP:

$$J = \int dF u^2,$$

wenn u die Entfernung des Flächentheilchens dF von der Achse AP.

Fig. 20.



Weil aber $u = y \cos\alpha - x \sin\alpha$ und weil ferner der Winkel α bei der Summirung nicht veränderlich ist, so wird

$$J = \cos^2\alpha \int dF y^2 + \sin^2\alpha \int dF x^2 - 2 \sin\alpha \cos\alpha \int dF x y.$$

Es ist aber

$\int dFy^2 = J_x$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die X-Achse,

$\int dFx^2 = J_y$ dasjenige in Bezug auf die Y-Achse,

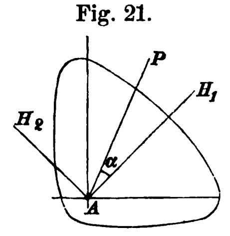
$\int dFxy = C$ das sog. Centrifugalmoment.

Daher kann man schreiben

1) $$J = \cos^2\alpha\, J_x + \sin^2\alpha\, J_y - \sin 2\,\alpha\, C. \text{ *)}$$

Zum Centrifugalmomente liefern der erste und dritte Quadrant positive, die anderen beiden negative Beiträge; überwiegen die Beiträge des ersten und dritten Quadranten, so ist $C > 0$. Verdreht man aber das Achsenkreuz gegen die Figur um einen rechten Winkel, so ändern sich in der Figur die Nummern der Quadranten je um eine Einheit, und die Folge davon ist ein Zeichenwechsel der einzelnen Beiträge und damit auch des Werthes C. Da nun der Uebergang aus dem Positiven ins Negative bei der Drehung des Achsenkreuzes stetig erfolgt, so muss es eine Zwischenlage des Achsenkreuzes geben, für welche $C = 0$. Diese Bedingung möge durch die Achsen AH_1 und AH_2 erfüllt werden (Fig. 21), dann heifsen diese die Hauptachsen der Figur für den Punkt A. Die darauf bezogenen Trägheitsmomente J_1 und J_2 heifsen Haupt-Trägheitsmomente, u. zw. soll die Numerirung so gewählt werden, dass

Fig. 21.



$$J_1 \geq J_2 \text{ sei.}$$

Werden die Hauptachsen zu Koordinatenachsen gewählt, und wird der Winkel α der Achse AP von AH_1 aus gemessen, so wird aus Gl. 1 einfach

2) $$J = \cos^2\alpha\, J_1 + \sin^2\alpha\, J_2.$$

Vertauscht man hierin das eine Mal $\cos^2\alpha$ mit $1 - \sin^2\alpha$, das andere Mal $\sin^2\alpha$ mit $1 - \cos^2\alpha$, so entsteht

$$J = J_1 - \sin^2\alpha\,(J_1 - J_2) \quad \text{bezw.}$$
$$J = J_2 + \cos^2\alpha\,(J_1 - J_2),$$

und da $J_1 - J_2$ stets $\geqq 0$, so muss $J \leqq J_1$ und $J \geqq J_2$ sein, d. h.

Von allen Trägheitsmomenten in Bezug auf Achsen, die durch einen Punkt A gehen, ist das erste Haupt-

---

*) Vergl. Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen; Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1870, S. 47.

Trägheitsmoment das gröfste, das zweite Haupt-Trägheitsmoment das kleinste.

Kann durch A eine Symmetrie-Achse gelegt werden, so ist diese offenbar eine Hauptachse und die Winkelrechte dazu die andere, weil in Bezug auf diese Achsen $C = \int dF\,xy = 0$ ist (denn jedem Flächentheilchen mit positivem Beitrage zu C entspricht symmetrisch ein Flächentheilchen mit negativem Beitrage).

Ist eine Symmetrie-Achse durch A nicht möglich, so kann zur Aufsuchung der Hauptachsen die Eigenschaft benutzt werden, dass J_1 und J_2 gröfste und kleinste Werthe von J sind. Man legt ein beliebiges Achsenkreuz fest und sucht die beiden Neigungswinkel α anderer Achsen, für welche J einen gröfsten oder kleinsten Werth bekommt. Die erste Abgeleitete von Gl. 1 lässt sich schreiben:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = -\sin 2\alpha\,(J_x - J_y) - 2\cos 2\alpha\,C,$$

die zweite Abgeleitete:

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2} = -2\cos 2\alpha\,(J_x - J_y - 2\,\mathrm{tg}\,2\alpha\,C).$$

Die Nullsetzung der ersten Abgeleiteten giebt

$$3) \qquad \mathrm{tg}\,2\alpha = -\frac{2C}{J_x - J_y},$$

und durch Einsetzung dieses Werthes wird

$$4) \quad \frac{d^2 J}{d\alpha^2} = -2\cos 2\alpha\left(J_x - J_y + \frac{4C^2}{J_x - J_y}\right) = -\frac{2\cos 2\alpha}{J_x - J_y}\left\{(J_x - J_y)^2 + 4C^2\right\}$$

Die Bezeichnung der Koordinatenachsen sei so gewählt, dass $J_x \geqq J_y$; dann ist das Vorzeichen der zweiten Abgeleiteten (Gl. 4) nur von $\cos 2\alpha$ abhängig, nämlich mit $-\cos 2\alpha$ übereinstimmend. Gleichung 3 giebt für 2α zwei Werthe, die um π von einander abweichen; derjenige dieser beiden Winkel, der im ersten oder vierten Quadranten liegt, entspricht dem Gröfstwerthe von J, also der ersten Hauptachse.

Fig. 22.

Zur Ausführung dieser Rechnungen muss man in Bezug auf das willkürlich festgelegte Achsenkreuz die Werthe J_x, J_y und C ermittelt haben. Sind diese aber bekannt, so kann man die Gröfsen J_1 und J_2 unmittelbar auf sie zurückführen. In Bezug auf die Hauptachsen gilt ja die Gl. 2. Weicht

nun AH_1 um α von AX ab (Fig. 22), so hat in Bezug auf das Kreuz der Hauptachsen AX den Neigungswinkel $-\alpha$, AY den Neigungswinkel $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Vertauscht man daher in Gl. 2 α mit $-\alpha$, so entsteht

$$J_x = \cos^2\alpha\, J_1 + \sin^2\alpha\, J_2,$$

vertauscht man aber in Gl. 2 α mit $\frac{\pi}{2}-\alpha$, so erhält man

$$J_y = \sin^2\alpha\, J_1 + \cos^2\alpha\, J_2.$$

Diese beiden Gleichungen geben aber

$$J_1 + J_2 = J_x + J_y$$
$$J_1 - J_2 = (J_x - J_y)\sec 2\alpha,$$

oder, weil nach Gl. 3 $\sec 2\alpha = \pm\sqrt{1+\frac{4C^2}{(J_x-J_y)^2}}$,

$$5)\qquad J_{\substack{1\\2}} = {}^1\!/_2\,(J_x + J_y) \pm \sqrt{{}^1\!/_4\,(J_x - J_y)^2 + C^2}.$$

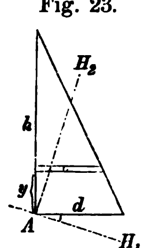
Beispiel: Für ein rechtwinkliges Dreieck der Katheten d und h (Fig. 23) sollen die Hauptachsen des rechtwinkligen Eckpunktes gesucht werden. Die Katheten werden als Koordinatenachsen gewählt, und es möge zunächst C berechnet werden. Ein Flächenstreifen in der Höhe y hat die Breite $u = d\left(1-\frac{y}{h}\right)$. Für die Flächentheilchen dieses Streifens sind y und dy konstant, daher liefert der Streifen zu C den Beitrag

$$y\,dy\int_0^u x\,dx = y\,dy\cdot{}^1\!/_2\,d^2\left(1-\frac{y}{h}\right)^2.$$

Wird dieser Ausdruck nun auch nach y zwischen den Grenzen 0 und h integrirt, so liefert er den Werth C, u. zw. nach Ausführung der Rechnung zu

$$C = \frac{d^2h^2}{24} = {}^1\!/_{12}\,F\,d\,h.$$

Fig. 23.



Die Trägheitsmomente findet man leicht zu

$$J_x = {}^1\!/_6\,Fh^2 \qquad J_y = {}^1\!/_6\,Fd^2.$$

Nach Gl. 3 und 5 wird dann

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\frac{h}{d}}{\frac{h^2}{d^2}-1} \quad \text{und}$$

$$J_{\substack{1\\2}} = \frac{Fd^2}{12}\left[\frac{h^2}{d^2}+1\pm\sqrt{\left(\frac{h^2}{d^2}-1\right)^2+\frac{h^2}{d^2}}\right].$$

Für $h/d = 2$ ergiebt sich besonders $\operatorname{tg} 2\alpha = -{}^2\!/_3$, oder $2\alpha = -33^0\,41'$ und $146^0\,19'$; ersterer Werth entspricht der ersten Hauptachse

mit $\alpha = -16^0\,50{,}5'$. Meistens lehrt schon ein Blick auf die Figur, welche der beiden Hauptachsen das größere J liefert. — Es wird hier endlich

$$J_1 = 0{,}717\,Fd^2 = 0{,}179\,Fh^2$$
$$J_2 = 0{,}116\,Fd^2 = 0{,}029\,Fh^2.$$

III. Veränderung des Centrifugalmoments durch eine Parallel-Verschiebung der Achsen.

In Bezug auf ein Achsenkreuz durch den Schwerpunkt S der Figur sei $C_S = \int dF\,xy$ das Centrifugalmoment. Verschiebt man nun das Achsenkreuz parallel um e_1 bezw. e_2 an den Punkt A (Fig. 24), so ist

Fig. 24.

$$C_A = \int dF(x+e_1)(y+e_2)$$
$$= \int dF\,xy + e_1 \int dF\,y + e_2 \int dF\,x + e_1\,e_2\,F,$$

oder, weil $\int dF\,x = \int dF\,y = 0$,

1) $$\boldsymbol{C_A = C_S + F e_1 e_2}.$$

Waren die Achsen durch S Hauptachsen, war also $C_S = 0$, so wird einfach

2) $$\boldsymbol{C_A = F e_1 e_2}.$$

Hierin bedeuten e_1 und e_2 die Koordinaten des Schwerpunktes S in Bezug auf das Achsenkreuz durch A.

Beispiel: Sollen für das rechtwinklige Dreieck (Fig. 25) die Schwerpunkts-Hauptachsen ermittelt werden, so ist in Bezug auf ein Achsenkreuz parallel den Katheten

$$J_x = Fh^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) = {}^1/_{18}\,Fh^2,$$
$$J_y = {}^1/_{18}\,Fd^2,$$
$$C_S = Fdh\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{9}\right) = -{}^1/_{36}\,Fdh.$$

Fig. 25.

Hiernach wird $\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{h/d}{h^2/d^2 - 1} \quad$ und

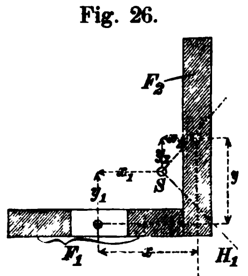
$$J_{\substack{1\\2}} = \frac{Fd^2}{36}\left[\frac{h^2}{d_2} + 1 \pm \sqrt{\left(\frac{h^2}{d^2} - 1\right)^2 + \frac{h^2}{d^2}}\right].$$

Für $h/d = 2$ erhält man besonders $\operatorname{tg} 2\alpha = {}^2/_3$, oder $2\alpha = 33^0\,41'$ und $213^0\,41'$; ersterer Werth entspricht der ersten Hauptachse mit $\alpha = 16^0\,50{,}5'$.

Kann man die Figur in 2 Theile zerlegen, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 und deren höhere Momente man schon kennt, und

sollen die Hauptachsen des Gesammt-Schwerpunktes S gesucht werden, so lassen sich die meist wenig abgerundeten Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 der Theilschwerpunkte aus der Zahlenrechnung fernhalten, und man braucht nur mit den meist einfacheren Summen:

Fig. 26.



$$x_1 + x_2 = x, \quad y_1 + y_2 = y$$

zu rechnen.

Sind nämlich F_1 und F_2 die Theile von F, so findet man leicht die Beziehungen:

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + \frac{F_1 F_2}{F} y^2, \text{ *)}$$

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + \frac{F_1 F_2}{F} x^2,$$

$$C = C_1 + C_2 + \frac{F_1 F_2}{F} xy.$$

Darin bedeuten J_{x_1}, J_{y_1} und C_1 die Trägheitsmomente und das Centrifugalmoment der Fläche F_1 in Bezug auf ein Achsenkreuz durch S_1, welches dem Achsenkreuze durch S parallel liegt; J_{x_2}, J_{y_2} und C_2 haben entsprechende Bedeutung für F_2.

Beispiel: Fig. 26 stellt den Querschnitt eines Winkeleisens von 8 cm Schenkellänge und 1 cm Stärke dar, welches durch ein Nietloch von 2 cm Durchmesser in dem wagerechten Schenkel unsymmetrisch geworden ist.

Es ist $F_1 = 5$, $F_2 = 8$, $F = 13$ qcm, $x = 4$, $y = 3{,}5$ cm (während $x_1 = 2{,}46$, $x_2 = 1{,}54$, $y_1 = 2{,}15$, $y_2 = 1{,}35$ cm sind); $C_1 = C_2 = 0$;

$$J_x = \tfrac{1}{12}\, 5 \cdot 1^3 + \tfrac{1}{12}\, 1 \cdot 8^3 + \frac{5 \cdot 8}{13} 3{,}5^2 = 80{,}776;$$

$$J_y = \tfrac{1}{12}(7^3 - 2^3) + \tfrac{1}{12} \cdot 8 + \frac{5 \cdot 8}{13} \cdot 4^2 = 77{,}815;$$

$$C = \frac{5 \cdot 8}{13} \cdot 3{,}5 \cdot 4 = 43{,}077;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot 43{,}077}{80{,}776 - 77{,}815} = -29{,}0806;$$

$$2\alpha = -88^0\, 2' \text{ (entspricht } J_1\text{)}, \quad \alpha = -44^0\, 1$$

$$J_{\substack{1\\2}} = 79{,}296 \pm \sqrt{2{,}193 + 1855{,}628},$$

$$J_1 = 122{,}388; \quad J_2 = 36{,}194.$$

---

*) Vgl. eine Abhandlung von Beyerhaus in dem Wochenblatte für Architekten und Ingenieure 1884, S. 250 u. 260; ferner Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl., 1. Bd., S. 43.

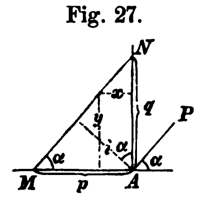
IV. Trägheits-Ellipse.

Setzt man $J = Fi^2$, $J_1 = Fa^2$, $J_2 = Fb^2$, so sind i, a und b Trägheits-Halbmesser, u. zw. a und b die Haupt-Trägheitshalbmesser der betreffenden Figur für den Punkt A. Werden diese Werthe in Gl. 2 (S. 20) eingeführt, so erhält man

1) $$i^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha .$$

Diese Beziehung für den mit α veränderlichen Trägheitshalbmesser i lässt sich geometrisch darstellen (Fig. 27), indem man in der Entfernung i von der Achse AP eine Parallele zieht; diese schneidet dann auf den Hauptachsen die Stücke $AM = p$, $AN = q$ ab, und es ist $\sin\alpha = i/p$, $\cos\alpha = i/q$. Führt man diese Gröfsen in Gleichung 1 ein, so ergiebt sich

Fig. 27.



2) $$1 = \frac{a^2}{q^2} + \frac{b^2}{p^2} \cdot \text{ *)}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse in Linien-Koordinaten, d. h. die obige Beziehung zwischen den Abschnitten p und q bedingt ein System von Geraden, welche sämmtlich Tangenten an eine Ellipse der Halbachsen a und b sind, diese Ellipse also umhüllen.

Um dies nachzuweisen bedenke man, dass die Gleichung der Geraden MN lautet:

$$\frac{y}{q} = \frac{p - x}{p},$$

oder, weil nach Gl. 2 $q = \frac{ap}{\sqrt{p^2 - b^2}}$:

3) $$y\sqrt{p^2 - b^2} = a(p - x).$$

Diffenrentiirt man diese Gleichung nach p, so erhält man

4) $$\frac{yp}{\sqrt{p^2 - b^2}} = a.$$

Nach der Lehre von den Umhüllungslinien ist diese Gl. 4 mit Gl. 3 zu vereinigen, woraus nach Entfernung von p (indem man die Gleichungen einmal multiplicirt, einmal dividirt) und einfacher Zusammenziehung die Gleichung der Ellipse

5) $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

entsteht.

*) Vgl. Bauschinger, Elemente der graphischen Statik, 1. Aufl., S. 124.

Man kann auch umgekehrt vorgehen, indem man vorstehende Ellipsengleichung zu Grunde legt; die Tangente an einen Ellipsenpunkt x_1, y_1 hat dann die Gleichung

6) $$\frac{x x_1}{b_2} + \frac{y y_1}{a_2} = 1.$$

Setzt man hierin $x = 0$, so erhält man für den Abschnitt auf der Y-Achse:

$$y = q = \frac{a^2}{y^1} \quad \text{oder } \frac{y_1}{a} = \frac{a}{q} \; ;$$

setzt man in Gl. 6 sodann $y = 0$, so erhält man für den Abschnitt auf der X-Achse:

$$x = p = \frac{b^2}{x_1} \quad \text{oder } \frac{x_1}{b} = \frac{b}{p}.$$

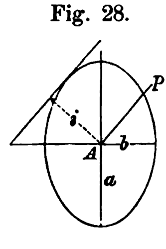
Diese Quotienten liefern, in Gl. 5 eingeführt, die Beziehung

$$1 = \frac{a^2}{q^2} + \frac{b^2}{p^2},$$

welche mit Gl. 2 übereinstimmt.

Trägt man sonach rechtwinklig zu den beiden Hauptachsen die entsprechenden Trägheitshalbmesser a und b auf und zeichnet mit diesen als Halbmesser eine Ellipse (Fig. 28), so ist das die Trägheits-Ellipse. Zieht man parallel zu irgend einer durch A gehenden Achse AP eine Tangente an die Ellipse, so ist deren Abstand i von der Achse AP der Trägheitshalbmesser in Bezug auf diese Achse. Offenbar ist a der gröfste, b der kleinste aller dieser Abstände, entsprechend dem gröfsten und kleinsten Trägheitsmomente.

Fig. 28.



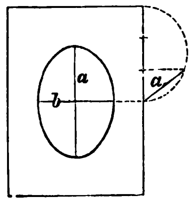
Ist A der Schwerpunkt der gegebenen Figur, so nennt man die Trägheits-Ellipse im Besonderen Central-Ellipse.

Beispiel: Für ein Rechteck der Seiten d und h (Fig. 29) sind die beiden Mittellinien offenbar Schwerpunkts-Hauptachsen (weil $\int dF x y = 0$). Es ist

$$J_1 = \frac{d h^3}{12} = \frac{F h^2}{12}, \quad \text{also } a = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0{,}2887\, h \; ;$$

ebenso $b = 0{,}2887\, d$.

Fig. 29.



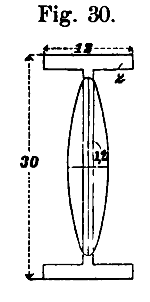
Um a durch Zeichnung zu erhalten, zerlegt man $a^2 = {}^1/_{12} h^2$ (wie in allen ähnlichen Fällen) in zwei bequeme Faktoren, z. B. $h/2 \cdot h/6$ und findet die mittlere Proportionale aus diesen mit Hülfe eines Kreises über dem Durchmesser $h/2$. Zur Ermittelung von b verfährt man entsprechend.

Beispiel: Für den I-Querschnitt der Figur 30 sind die beiden Mittellinien ebenfalls Hauptachsen. Es ist

$$J_1 = {}^1/_{12}\cdot 12\cdot 30^3 - {}^1/_{12}\cdot 10{,}8\cdot 26^3 = 11\,182;$$
$$J_2 = {}^1/_{12}\cdot 26\cdot 1{,}2^3 + {}^1/_{12}\cdot 4\cdot 12^3 = 580;$$
$$F = 79{,}2;\ \text{daher}\ a^2 = 141\ \text{und}\ b^2 = 7{,}31;$$

mithin $a = 11{,}9$; $b = 2{,}7$.

Fig. 30.



Sind die beiden Haupt-Trägheitsmomente J_1 und J_2 einander gleich, so wird aus der Trägheits-Ellipse ein **Kreis**, und es sind dann die Trägheitsmomente in Bezug auf alle durch den Punkt A gehende Achsen von derselben Gröfse. In diesem Falle ist jede solche Achse eine Hauptachse.

Dies gilt z. B. für das Quadrat und für jedes regelmäfsige Vieleck in Bezug auf den Schwerpunkt, ebenso auch für einen kreuzförmigen Querschnitt mit 4 gleichen Armen; auch bei T- und I-Querschnitten kann man das Verhältnis der Höhe zur Breite so bestimmen, dass $J_1 = J_2$ wird und dass dann auch sämmtliche Schwerpunktachsen gleiche Trägheitsmomente haben.

V. Trägheits-Ellipse in Bezug auf schiefe Achsen.

Falls man die Hauptachsen nicht ohne weiteres erkennen kann, ist es zuweilen von Vortheil, ein schiefes Achsenkreuz zu benutzen (Fig. 31).

Fig. 31.

Ein solches von einem Koordinatenwinkel β sei durch den Punkt A einer gegebenen Figur gelegt. Dann ist der Abstand u eines Flächentheilchens von der Achse AP

$$u = y\cos\gamma - x\sin\alpha,$$

und es wird das Trägheitsmoment der Figur in Bezug auf AP:

$$J = \cos^2\gamma \int dF y^2 + \sin^2\alpha \int dF x^2 - 2\sin\alpha\cos\gamma \int dF xy.$$

Man verdrehe nun das Achsenkreuz wieder so weit, dass $\int dF xy = 0$ werde, dann erhält man einfacher

$$1)\qquad J = \cos^2\gamma \int dF y^2 + \sin^2\alpha \int dF x^2.$$

Das Trägheitsmoment der Figur in Bezug auf die X-Achse ist aber, weil der rechtwinklige Abstand eines Flächentheilchens $y\sin\beta$,

$$J_x = \sin^2\beta \int dF y^2;$$

mithin wird $\int dF y^2 = \frac{J_x}{\sin^2\beta}$ und $\int dF x^2 = \frac{J_y}{\sin^2\beta}$.

Führt man zugleich noch die Trägheitshalbmesser i_x, i_y und i ein, so entsteht aus Gl. 1:

Fig. 32.

$$2) \qquad i^2 = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta} i_x^2 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} i_y^2.$$

Zieht man nun wieder, wie auf S. 25, in der Entfernung i von der Achse AP eine Parallele (Fig. 32), welche auf den Koordinatenachsen die Stücke $AM = p$, $MN = q$ abschneidet, so ist $\cos\gamma = \frac{i}{q}$, $\sin\alpha = \frac{i}{p}$, und aus Gl. 2 wird:

$$3) \qquad 1 = \frac{i_x^2}{\sin^2\beta\, q^2} + \frac{i_y^2}{\sin^2\beta\, p^2}.$$

Auf demselben Wege wie S. 25 ergiebt sich die Gleichung der Umhüllungslinie zu

Fig. 33.

$$\frac{x^2 \sin^2\beta}{i_y^2} + \frac{y^2 \sin^2\beta}{i_x^2} = 1;$$

sie bezeichnet eine Ellipse, bezogen auf ihre konjugirten Halbmesser

$$B = \frac{i_y}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad A = \frac{i_x}{\sin\beta} \quad \text{(Fig. 33).}$$

Jedes Achsenkreuz, in Bezug auf welches $\int dFxy = 0$, ist hiernach ein Paar konjugirter Achsen der Trägheits-Ellipse und umgekehrt. Da ferner

$$\int dFy^2 = \frac{J_x}{\sin^2\beta} = \frac{F i_x^2}{\sin^2\beta} = FA^2,$$

so ist allgemein

$$\int dFy^2 = FA^2, \quad \int dFx^2 = FB^2,$$

wobei A und B die in der Richtung der y bezw. x gezogenen Ellipsen-Halbmesser sind.

Dies Ergebnis ist wichtig für Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze u. dgl. Kann man nämlich eine Figur durch Geraden einer bestimmten Richtung (der X-Richtung) in beliebig viele Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte in einer Geraden (der Y-Achse) liegen, und wählt man in letzterer einen Punkt A, so ist in Bezug auf das Achsenkreuz AX und AY der Werth $\int dFxy = 0$, und dann sind diese Achsen konjugirt bezüglich die Trägheits-Ellipse für den Punkt A.

Beispiel: Für ein Dreieck (Fig. 34) von der Grundlinie d, der Höhe h, der Mittellinie $m = h : \sin\beta$ sind offenbar SX und SY konjugirte Achsen. Es ist $J_x = {}^1/_{18} F h^2 = \sin\beta \int dF y^2 = \sin^2\beta\, F A^2$,

mithin $$A^2 = \frac{1}{18} \frac{h^2}{\sin^2\beta} = \frac{m^2}{18} = \frac{m}{3} \cdot \frac{m}{6},$$

woraus $A = \frac{m}{\sqrt{18}} = 0{,}707 \cdot \frac{m}{3}$ leicht zu konstruiren ist. Hiermit kennt man 2 Tangenten an die Ellipse nebst ihren Berührungspunkten E und F. In Bezug auf SY ist $J_y = {}^1/_6 F \left(\frac{d}{2} \sin\beta\right)^2$, daher $B^2 = {}^1/_{24} d^2$ und $B = 0{,}204 d$, womit wiederum 2 Tangenten mit den Berührungspunkten G und H gefunden sind. Da man nun jede Seite des Dreiecks als Grundlinie behandeln kann, lassen sich in dieser Weise im Ganzen 12 Tangenten mit ihren Berührungspunkten bestimmen. *)

Fig. 34.

Beispiel: Für ein Parallelogramm (Fig. 35) mit den Seiten d und h_1 und dem Winkel β sind die den Seiten parallelen Mittellinien konjugirte Achsen. Es ist

$$J_x = {}^1/_{12} F h_1^2 \sin^2\beta = \sin^2\beta\, F A^2,$$

mithin $A^2 = {}^1/_{12} h_1^2$ und A ebenso zu konstruiren wie beim Rechteck a. Ebenso ist $B^2 = {}^1/_{12} d^2$. Die Diagonalen sind aber ebenfalls konjugirte Achsen. Da nun das Trägheitsmoment eines Dreieckes in Bezug auf die Grundlinie ${}^1/_6 F h^2$, so wird, wenn die Länge einer Diagonalen des Parallelogramms D ist, der Ellipsenhalbmesser in deren Richtung $A_1 = {}^1/_2 D \sqrt{{}^1/_6} = \sqrt{{}^D/_4 \cdot {}^D/_6} = 0{,}409\ {}^D/_2$. Hierdurch lassen sich im Ganzen 8 Tangenten nebst ihren Berührungspunkten bestimmen.

Fig. 35.

VI. Lage der Biegungsachse und Gröfse der Biegungs-Spannung.

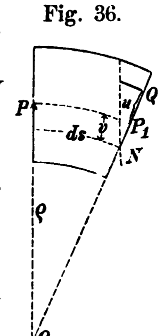
Für die Vertheilung der Normalspannungen σ_x über den Querschnitt wird die Annahme gemacht, dass ebene Querschnitte rechtwinklig zur Stabachse auch nach der Biegung eben und rechtwinklig zur Biegungslinie sind.

Zwei Querschnitte durch die Punkte P und P_1 (Fig. 36) der Biegungslinie in unendlich kleinem Abstande schneiden sich in der Krümmungsachse O für das Kurvenstück PP_1. Die Biegungsachse durch P ist der Krümmungsachse parallel; denkt man

*) Vgl. Culmann, Graphische Statik, 2. Aufl., 1. Bd., S. 440.

sich also beide Achsen rechtwinklig zur Bildebene, so liegt PP_1 in derselben. Es sei ds die ursprüngliche Entfernung der beiden Querschnitte. Zieht man in diesem Abstande eine Parallele zu OP, so möge diese die OP_1 in N schneiden. Die Achse N rechtwinklig zur Bildebene ist dann die Null-Linie, weil in ihren Punkten die Dehnung, mithin auch σ_x gleich Null ist; sie sei um v von der Biegungsachse entfernt. Die Spannung σ_x im Abstande u von der Biegungsachse bedingt auf die Länge ds (bei Q) eine Verlängerung $ds \cdot \sigma_x : E$, und es ist nach Figur 36

Fig. 36.



$$\frac{ds \frac{\sigma_x}{E}}{u+v} = \frac{ds}{\rho - v} \quad \text{oder} \quad \sigma_x = \frac{E(u+v)}{\rho - v}.$$

Da nun die gesammten Normalspannkräfte nach S. 18 ein Kräftepaar bilden müssen, so ist $\int \sigma_x dF = 0$, mithin

$$\frac{E}{\rho - v} \int dF u + \frac{Ev}{\rho - v} F = 0.$$

Weil aber $\int dFu$, bezogen auf die Schwerpunktsachse, Null ist, so ergiebt sich auch $v = 0$, d. h.: Die Null-Linie fällt mit der Biegungsachse zusammen. Die Spannung an beliebiger Stelle wird

1) $$\sigma_x = \frac{E}{\rho} u.$$

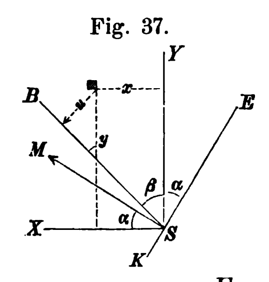
Es ist nun noch die Richtung der Biegungsachse gegen die Kräfte-Ebene zu ermitteln.

Ist letztere für den Stab eine Symmetrie-Ebene, so wird in ihr offenbar auch die Biegungslinie liegen, und die Biegungsachsen sind dann überall rechtwinklig zur Kräfte-Ebene. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so liegt die Biegungslinie im Allgemeinen nicht in der Kräfte-Ebene, die Biegungsachse also schief zu dieser Ebene.

Um die Beziehung zwischen beiden zu finden, lege man durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz SX und SY (Fig. 37). Die Kräfte-Ebene KE bilde mit der Y-Achse einen Winkel α; das in ihr wirkende Kräfte-

paar vom Momente M werde von S aus durch seine Achse M rechtwinklig zur Ebene dargestellt; diese Achse schliefst dann mit der X-Achse den Winkel α ein und kann in die beiden Kräftepaars-Achsen $M_x = M \cos \alpha$, $M_y = M \sin \alpha$ zerlegt werden. Die Biegungsachse SB weiche um den unbekannten Winkel β vor SY ab. Ein Flächentheilchen dF mit den Koordinaten x und y sei von der Biegungsachse um u entfernt, erfährt daher nach Gl. 1 eine Spannung $\frac{E}{\rho} u$, eine Spannkraft $\frac{E}{\rho} u dF$.

Fig. 37.



Diese Spannkräfte müssen nun mit $M \cos \alpha$ und $M \sin \alpha$ im Gleichgewichte sein, es gelten daher die Momentengleichungen in Bezug auf SX und SY:

$$M \cos \alpha = \frac{E}{\rho} \int dF u y \quad \text{und} \quad M \sin \alpha = -\frac{E}{\rho} \int dF u x,$$

oder, weil $u = y \sin \beta - x \cos \beta$:

$$M \cos \alpha = \frac{E}{\rho} (\sin \beta \int dF y^2 - \cos \beta \int dF xy)$$

$$M \sin \alpha = \frac{E}{\rho} (\cos \beta \int dF x^2 - \sin \beta \int dF xy).$$

Sind aber SX und SY Hauptachsen, so ist $\int dF y^2 = J_1$, $\int dF x^2 = J_2$, $\int dF xy = 0$, und man erhält

$$2) \qquad M \cos \alpha = \frac{E}{\rho} \sin \beta \, J_1; \quad M \sin \alpha = \frac{E}{\rho} \cos \beta \, J_2. \text{*)}$$

Theilt man beide Gleichungen durch einander, so entsteht

$$3) \qquad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{J_2}{J_1} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Diese Gleichung gilt aber auch für die beiden Winkel α und β, die in einer Ellipse der Halbachsen a und b zwei konjugirte Durchmesser mit der Halbachse a einschliefsen; es ergiebt sich daher die einfache geometrische Beziehung:

In der Querschnittsfigur sind die Biegungsachse und die Richtung der Kräfte-Ebene konjugirte Achsen der Centralellipse.

---

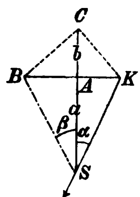
*) Vgl. Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2. Aufl., S. 85.

Schneidet z. B. die Kraftebene einen rechteckigen Querschnitt in einer Diagonalen (Fig. 38), so ist die andere Diagonale die Biegungsachse, und rechtwinklig zu dieser erfolgt die Biegung. Kraftebene und Biegungs-Ebene können dann bedeutend von einander abweichen.

Fig. 38.

Sind a, b und α gegeben, so findet man die Richtung der Biegungsachse durch Zeichnung nach Fig. 39. SA sei der erste Haupt-Trägheitshalbmesser a in richtiger Lage; man verlängere ihn um $b = AC$ und ziehe durch A eine Rechtwinklige zu a. Wird diese von der Kraftebene SK in K geschnitten, so zieht man KC und dazu rechtwinklig CB, dann ist SB die Biegungsachse, weil $b^2 = a \operatorname{tg} \alpha \cdot a \operatorname{tg} \beta$.

Fig. 39.



Die beiden Gl. 2 ergeben ferner

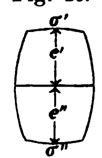
$$M = \frac{E}{\rho} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{J_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{J_2^2}}}; \tag{4}$$

Da nach Gl. 1 $E:\rho$ die Spannung im Abstande gleich Eins von der Biegungsachse ist, so kann man nach Gl. 4 die Spannungen σ_x bei beliebig schiefer Lage der Kraftebene zu den Hauptachsen berechnen.

Schneidet die Kraftebene sämmtliche Querschnitte in Schwerpunkts-Hauptachsen, so liegt eine sog. gerade Belastung vor. Die Biegungsachse steht dann rechtwinklig zur Kraftebene, und letztere enthält zugleich die Biegungsebene. Für $\alpha = 0$ fällt die Biegungsachse mit der ersten Hauptachse zusammen, und es wird

$$M = \frac{EJ_1}{\rho}, \quad \text{für } \alpha = 90^0 \text{ entsteht } M = \frac{EJ_2}{\rho}.$$

Fig. 40.



Nennt man in solchen Fällen das auf die Biegungsachse bezogene Trägheitsmoment einfach J, so wird

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} u = \frac{Mu}{J}. \tag{5}$$

Bei der in Fig. 36 dargestellten Biegungsart finden im oberen Theile des Querschnitts die Zugspannungen statt, und im gröfsten

Abstande (Fig. 40) von der Biegungsachse herrscht die stärkste Zugspannung

$$6)\qquad \sigma' = \frac{Me'}{J}, \text{ während } \sigma'' = \frac{Me''}{J}$$

die stärkste Druckspannung ist. Die Krümmung der Biegungslinie wird

$$7)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} = \frac{\sigma'}{Ee'}.$$

Fälle der schiefen Belastung kann man in der Weise behandeln, dass man das Moment M nach den Richtungen der beiden Hauptachsen zerlegt. Jedes dieser Theilmomente liefert dann für sich allein eine gerade Belastung, für welche sich die stärksten Spannungen und die Durchbiegungen berechnen lassen. Man hat dann beide Biegungen als gleichzeitig auftretend anzusehen. Bei eckigem Querschnitte kommen häufig die stärksten Spannungen der beiden Einzelfälle auf dieselben Punkte und sind dann einfach zusammenzurechnen.

VII. Grundgleichung der Biegungslinie bei gerader Belastung.

Wird die Biegungslinie auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogen, so wird aus Gl. 7 (s. oben):

$$1)\qquad \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EJ}.$$

Kann die X-Achse aber so gelegt werden, dass sie gegen die Achse des Stabes im ungebogenen Zustande nur wenig oder gar nicht geneigt ist, so wird auch bei einer Biegung, die im Folgenden stets als klein vorausgesetzt wird, die Neigung dy/dx der Biegungslinie gegen die X-Achse an allen Stellen nur klein sein, so dass $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$ gesetzt werden kann. (Es bedeutet dies die Vertauschung der Bogenlänge ds der Biegungslinie mit ihrer Projektion dx.) Dadurch entsteht dann die erheblich vereinfachte Gleichung:

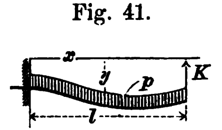
$$2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}.$$

Erfolgt die Biegung in dem gewählten Achsenkreuze derartig, dass die Biegungslinie der positiven Seite der X-Achse die

konvexe Seite zukehrt, so ist bekanntlich für die Gleichung der Biegungslinie $\frac{dy^2}{dx^2} > 0$, und umgekehrt. Da ein gegebenes Moment M an und für sich ein positives oder negatives Vorzeichen nicht hat, so muss dasselbe im ersten Falle mit $+$, im anderen mit $-$ in Gl. 2 eingesetzt werden. Bei demselben Biegungsfalle kann eine willkürliche Verlegung des Achsenkreuzes daher unter Umständen eine Aenderung im Vorzeichen des Momentes bedingen.

Wirken an einem Balken gleichzeitig Kräfte mit entgegengesetzten Pfeilrichtungen, so liefern sie entgegengesetzte Beiträge zu M und haben auch entgegengesetzten Einfluss auf die Krümmung der Biegungslinie. Um in solchem Falle die Vorzeichen richtig zu bestimmen, denke man sich die im Biegungsmomente vorkommenden Kräfte fort bis auf eine solche, welche ihren Einfluss auf die Krümmungsweise leicht erkennen lässt, und bestimme in Gemäfsheit dieser Krümmung das Vorzeichen der betreffenden Kraft im Momente M; damit stehen dann auch die Vorzeichen der übrigen Beiträge zu M fest. Ist z. B. ein Stab mit seinem linksseitigen Ende wagerecht eingespannt (Fig. 41), über seine freie Länge l gleichmäfsig mit p belastet und greift am freien Ende eine aufwärts gerichtete Kraft K an, so denke man sich K zunächst fort; dann bringt die gleichmäfsige Belastung eine Biegungslinie hervor, die ihre konvexe Seite durchweg nach oben kehrt. Legt man nun die X-Achse durch die Einspannungs-Stelle (oder höher) und zählt positive Ordinaten y nach unten, so ist für die ganze unter dem Einflusse von p entstehende Biegungslinie $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$; das von p herrührende Moment muss daher als $+ \frac{1}{2} p (l - x)^2$ eingeführt werden, und der Beitrag von K ist negativ. Es entsteht

Fig. 41.



$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2}(l-x)^2 - K(l-x).$$

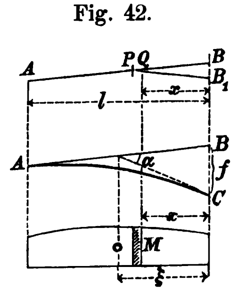
Die zweimalige Integration dieser Gleichung führt zur Gleichung der Biegungslinie.

Bei der Untersuchung eines Körpers auf Gleichgewicht ist es freilich üblich, die Momente von Kräften, welche in der Figur rechts herum

drehen, positiv anzusetzen, und umgekehrt. Doch ist diese Regel eine völlig willkürliche, für die man auch ebenso gut das Gegentheil zum Gebrauche empfehlen könnte. Zu der vorstehend behandelten Frage hat jene Regel durchaus keine Beziehung.

An solchen Stellen, wo das Moment $M = 0$, ist auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (wenn $J > 0$), d. h. die Biegungslinie hat dort einen Wendepunkt, ihre Krümmung ist Null.

Die Spannung σ' ist stets endlich; solange nun die Trägerhöhe und damit auch $e' > 0$, bleibt auch $\frac{\sigma'}{Ee'} = \frac{1}{\rho}$ (nach Gl. 7, S. 33) endlich; demnach kann auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht unendlich grofs werden. Die Neigung $\frac{dy}{dx}$ der Biegungslinie ändert sich daher immer stetig, nicht plötzlich, es sind in keiner Stelle der Linie 2 Tangenten möglich, die Biegungslinie kann nirgends einen Knick haben.


Fig. 42.

Es sei AB (Fig. 42) ein beliebiger Theil der Achse eines Stabes; er weiche nur wenig von der (wagerecht gedachten) X-Richtung ab und habe eine Länge l, die demnach mit ihrer wagerechten Projektion gleich gesetzt werden kann. Wird der Stab bei A eingespannt gedacht und wirkt nur an dem Theilchen $PQ = dx$ ein Moment, so krümmt sich PQ nach dem Halbmesser ρ und einem Centriwinkel $d\alpha = \frac{dx}{\rho} = \frac{M dx}{EJ}$. Um diesen Winkel neigt sich dann das noch gerade bleibende Stück QB gegen AB, und der Punkt B verschiebt sich um

$$B B_1 = df = x\, d\alpha = \frac{Mx\, dx}{EJ}\ .$$

Werden alle Theile des Stabes gebogen, so wird die Biegungslinie am freien Ende von der an der Einspannungsstelle A gezogenen Tangente um einen Winkel

$$\alpha = \int_0^l \frac{M dx}{EJ} \tag{3}$$

3*

abweichen, und der Abstand des freien Endes von der Tangente wird betragen

4) $$f = \int_0^l \frac{M x\, dx}{EJ}.$$

Diese Abweichung kann, wegen der geringen anfänglichen und nachherigen Neigung des Stabes gegen die X-Richtung, rechtwinklig zu x oder auch rechtwinklig zur Tangente gemessen werden. Bei der Benutzung der Gl. 4 ist jedoch zu beachten, dass der Abstand x eines Punktes der Biegungslinie nicht von A, sondern von demjenigen Punkte aus gerechnet werden muss, dessen Verschiebung man ermitteln will.

Ist der Stab von überall gleichem Querschnitte, ist daher EJ unveränderlich, so wird einfacher

$$EJ\alpha = \int_0^l M dx \quad \text{und} \quad EJf = \int_0^l M x\, dx.$$

Denkt man sich das veränderliche Moment M rechtwinklig zu einer mit der X-Richtung parallelen Achse aufgetragen, so ist Mdx ein Flächenstreifen dieser Momentenfläche und $Mx\,dx = Mdx \cdot x$ das statische Moment desselben, bezogen auf eine Senkrechte durch B. Nennt man daher die ganze Momentenfläche F_M und den Abstand ihres Schwerpunktes von der genannten Senkrechten ξ, so dass $F_M \cdot \xi$ das statische Moment der Momentenfläche, so wird einfach

5) $$EJ\alpha = F_M \quad \text{und} \quad EJf = F_M \cdot \xi$$

(wobei wiederum zu bemerken, dass ξ von der Stelle zu messen ist, deren Verschiebung man sucht). Da hiernach $f = \alpha\xi$, so schneidet die bei C (Fig. 42) gezogene Tangente die an A gezogene Berührende im Abstande ξ von C.

Fig. 43.

Ist ein Stab bei A wagerecht eingespannt (Fig. 43), am freien Ende mit K belastet, so wird F_M ein Dreieck von der Höhe Kl, daher

6) $$EJ\alpha = \tfrac{1}{2} Kl^2 \qquad EJf = \tfrac{1}{3} Kl^3.$$

Ist der Stab gleichmäfsig über seine ganze Länge mit p f. d. Längeneinheit belastet, so wird ebenso erhalten

7) $$EJ\alpha = \tfrac{1}{6} pl^3 \qquad EJf = \tfrac{1}{8} pl^4.$$

Wirkt am freien Ende ein Kräftepaar vom Momente M, ist also das Moment an jeder Stelle ebenfalls M, so wird

8) $$EJ\alpha = Ml \qquad EJf = \tfrac{1}{2} Ml^2.$$

Greifen an dem Stabtheile AB (Fig. 42) zwischen A und B beliebig viele Einzelkräfte, in B vielleicht noch ein Kräftepaar und eine Querkraft an, so setzt sich die Momentenfläche F_M aus einzelnen Theilen zusammen, von denen jeder einer der Kräfte (bezw. dem Kräftepaare) ausschliefslich entspricht, die also von einander unabhängig sind. Jede Biegungsursache liefert daher zu F_M und zu $F_M \cdot \xi$, mithin auch zu α und f ihren besonderen Beitrag. Man kann hiernach Momente, Biegungswinkel und Durchbiegungen berechnen, indem man entweder sämmtliche Ursachen zugleich berücksichtigt, oder die Wirkungen der einzelnen Ursachen getrennt ermittelt und dann mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen zusammenzählt.

Hat der Stab an der Einspannungsstelle eine schwache Neigung ω nach unten, so wird dadurch die Abweichung f von der Tangente nicht geändert, der Höhenunterschied aber zwischen Endpunkt und Einspannungsstelle vergröfsert sich um $l\omega$.

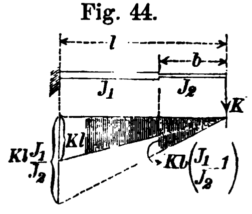
Bei veränderlichem Querschnitte kann man den Gleichungen 3 und 4 ebenfalls die einfache Form der Gl. 5 geben, wenn man statt M die Gröfse $M\frac{J_c}{J}$ aufträgt (unter J_c ein beliebiges unveränderliches Trägheitsmoment verstanden) und den Inhalt dieser verzerrten Momentenfläche mit F_M, ihren Schwerpunktsabstand mit ξ bezeichnet. Es wird dann

$$9) \qquad EJ_c\,\alpha = F_M, \qquad EJ_c f = F_M \cdot \xi.$$

VIII. Durchbiegung eines Stabes mit sprungweise sich änderndem Querschnitte.

Ein an dem einen Ende wagerecht eingespannter Stab (Fig. 44), der am freien Ende mit K belastet ist, habe auf eine Länge b vom freien Ende einen Querschnitt vom Trägheitsmomente J_2, übrigens einen solchen von J_1; dann entsteht, wenn man $J_c = J_1$ wählt, die in Fig. 44 dargestellte verzerrte Momentenfläche, und es wird

Fig. 44.



$$EJ_1\,\alpha = \tfrac{1}{2}Kl^2 + \tfrac{1}{2}Kb^2\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right),$$

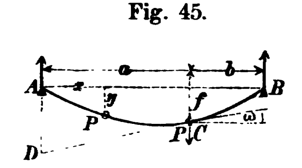
$$EJ_1 f = \tfrac{1}{3}Kl^3 + \tfrac{1}{3}Kb^3\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right).$$

Auf verwickeltere Fälle ähnlicher Art lässt sich dies Verfahren der Rechnung leicht übertragen.

IX. Durchbiegung eines prismatischen Balkens auf 2 Stützen mit einer Einzellast.

Der Balken auf 2 Stützen sei an beliebiger Stelle C mit P belastet (Fig. 45); es werde $a > b$ vorausgesetzt. Die Auflagerdrücke bezeichnen wir stets mit denselben Buchstaben wie die Stützpunkte. Die stärkste Durchbiegung liegt im Allgemeinen nicht an der Belastungsstelle, daher werde die unbekannte Neigung der Biegungslinie bei C mit ω bezeichnet. Um zunächst die Durchbiegung f bei C zu finden, denkt man sich das Stück BC mit festen Körpern umschlossen, ohne dass dadurch eine Formänderung verursacht würde; dann kann man AC als bei C mit der Neigung ω fest eingespannt betrachten; der Auflagerdruck ist nun als eine Kraft anzusehen, welche diesen eingespannten Stab um $AD = f + a\omega$ aufwärts biegt. (Bei den kleinen Neigungen wie sie in solchen Fällen vorkommen, kann $\operatorname{tg}\omega$ einfach mit ω vertauscht werden.) Nach Gl. 6, S. 36 ist aber $AD = f + a\omega = \frac{Aa^3}{3EJ}$. Ebenso erhält man $f - b\omega = \frac{Bb^3}{3EJ}$ durch Betrachtung des Stückes BC. Aus beiden Gleichungen ergiebt sich, nachdem man $A = Pb/l$ und $B = Pa/l$ eingesetzt hat:

Fig. 45.



$$1) \qquad f = \frac{Pa^2b^2}{3EJl} \qquad \omega = \frac{Pab(a-b)}{3EJl}.$$

Für $a = b = l/2$ wird $\omega = 0$, $f = \frac{Pl^3}{48\,EJ}$. Für $a > b$ aber ist $\omega > 0$; die Stelle der gröfsten Durchbiegung muss daher zwischen C und A gesucht werden. Zur Berechnung derselben muss die Gleichung der Biegungslinie AC entwickelt werden.

In Bezug auf A als Anfangspunkt gilt für einen Punkt P der Biegungslinie, welche der positiven Seite der X-Achse die konkave Seite zukehrt, die Grundgleichung 2, S. 33:

$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -Ax$; eine Integration liefert $EJ\frac{dy}{dx} = -A\frac{x^2}{2} + C$;

weil aber für $x = a$ $\frac{dy}{dx} = -\omega$, so wird $-EJ\omega = -\frac{Aa^2}{2} + C$,

folglich $$EJ\left(\frac{dy}{dx} + \omega\right) = \frac{Aa^2}{2} - \frac{Ax^2}{2}.$$

Durch fernere Integration wird

$$EJ(y + \omega x) = \frac{Aa^2}{2}x - \frac{Ax^3}{6} + C_1.$$

Da $x = 0$ und $y = 0$ als Koordinaten des Punktes A der Biegungslinie zusammengehören, so wird $C_1 = 0$. Nach Einführung der vorstehend bestimmten Werthe für A und ω erhält man dann

$$EJy = \frac{Pb}{6l}x(a^2 + 2ab - x^2),$$

oder nach Einsetzung von $a = l - b$:

2) $$EJy = \frac{Pbx}{6l}(l^2 - b^2 - x^2).$$

In dieser Gleichung sind b und x völlig vertauschbar, ohne dass dadurch y sich ändert. Verlegt man daher die Last von C nach dem Punkte P, so tritt nun bei C genau die Biegung y ein, die wir in Gl. 2 für den Punkt P gefunden haben.

Gleichung 2 gilt nur für das Stück AC der Biegungslinie, während für BC eine besondere Gleichung besteht (deren man bei dieser Untersuchung aber nicht bedarf). Es ist nämlich die Darstellung der Momente für die Balken in Fig. 45 bekanntlich ein Dreieck; die Momenten-Funktion erleidet daher bei C eine Stetigkeits-Unterbrechung, sie hat rechts von C plötzlich eine andere Form; daher kann die Integration nicht über C hinaus erstreckt werden, sondern es würde für BC eine neue Rechnung erforderlich sein. Jede Einzelkraft an einem Stabe, sowie jede plötzliche Aenderung des Querschnitts bedingt eine Stetigkeits-Unterbrechung der Biegungslinie an der betreffenden Stelle, so dass jedesmal eine neue Gleichung der Linie zur Geltung kommt. Zwei solche Stücke der Biegungslinie haben aber an der Uebergangsstelle nicht nur gemeinsame Neigung $\frac{dy}{dx}$, sondern auch (weil das Biegungsmoment an einer Stelle nur einen Werth hat) gemeinsame Krümmung $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$.

In Gl. 2 erreicht y seinen gröfsten Werth für

3) $$x_1 = \sqrt{1/3\,(l^2 - b^2)},$$ und zwar ist

4) $$EJy_{max} = 1/9\, P \frac{b}{l} (l^2 - b^2) \sqrt{1/3\,(l^2 - b^2)}.$$

Für $b = 1/2\, l$ entsteht wiederum $x_1 = 1/2\, l$ und

5) $$EJy_{max} = 1/48\, Pl^3.$$

Rückt nun die Last von der Mitte nach rechts, so dass b kleiner wird, so wächst x_1 (Gl. 3), und die Stelle der gröfsten Durchbiegung rückt ebenfalls nach rechts, aber erheblich langsamer als die Last. Wenn nämlich die Last bis ans rechtsseitige Auflager wandert, so wird $b = 0$ und $x_1 = l\sqrt{1/3} = 0{,}577\, l$, also nur um $0{,}077\, l = 1/13\, l$ gröfser als $1/2$. Die stärkste Durchbiegung liegt daher immer nur wenig von der Mitte entfernt, kann deshalb auch nur wenig gröfser sein, als die Durchbiegung y_m für $x = 1/2\, l$, welche man nach Gl. 2 aus

5) $$EJy_m = 1/48\, Pb\,(3\,l^2 - 4\,b^2)$$

erhält.

Der Werth y_m ist zunächst ein einfacher Annäherungs-Ausdruck für y_{max}, bietet aber besondere Vortheile bei gleichzeitigem Auftreten mehrerer Einzellasten. Die genaue Ermittelung der stärksten Durchbiegung ist in solchem Falle nämlich zeitraubend, weil zwischen je 2 Lasten eine besondere Gleichung der Biegungslinie gilt. Für jede Last einzeln y_{max} zu berechnen und die erhaltenen Werthe etwa zusammenzuzählen, führt nicht zum Ziele, da die verschiedenen y_{max} sich nicht auf dieselbe Stelle beziehen. Die Durchbiegungen y_m aber in der Trägermitte kann man nach Gl. 5 für jede Last einzeln berechnen und die Werthe zusammenzählen, um dadurch einen Annäherungs-Ausdruck für die gröfste Durchbiegung zu erhalten.

Beispiel: Welche Last kann eine Rundeisenstange von 4 cm Dicke bei 2 m freier Länge in $1/2$ m Abstand vom einen Auflager tragen, wenn die Anstrengung 700 at nicht überschreiten soll? Wie grofs sind die Durchbiegungen f, y_{max} und y_m, wenn $E = 2\,000\,000$ at ist?

Es ist hier $a = 3/4\, l$, $b = 1/4\, l$, $l = 200$ cm, $\sigma = 700$, daher wird das gröfste Moment $\frac{P\, 3/4\, l\; 1/4\, l}{l} = \sigma \frac{J}{e} = \sigma \frac{d^3 \pi}{32}$, woraus $P = 117$ kg und zugleich $\frac{P}{J} = \frac{32}{3} \frac{\sigma}{ld}$. Nach Gl. 1 wird $f = \frac{P a^2 b^2}{3EJl} = \frac{32}{3} \frac{\sigma}{ld} \frac{a^2 b^2}{3El}$ oder

$\frac{f}{l} = \frac{1}{8} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{d} = \frac{1}{457}$ und $f = 0{,}44$ cm. Die Stelle der größten Durchbiegung ergiebt sich nach Gl. 3 für $x_1 = \sqrt{1/3\,(l^2 - b^2)} = \frac{l}{2}\sqrt{2{,}5} = 111{,}8$ cm, also nur 11,8 cm von der Mitte entfernt, und die größte Durchbiegung selbst zu $y_{max} = \frac{1}{9} \frac{P}{J} \frac{b}{El}(l^2 - b^2)\sqrt{1/3\,(l^2 - b^2)} = 0{,}5425$ cm, während in der Mitte $y_m = 0{,}5355$ cm wird; der Unterschied beträgt nur 1,3 %.

X. Zwei gemeinschaftlich tragende Balken.

Werden 2 Balken ohne weitere Verbindung derartig über einander oder neben einander gelegt, dass bei gleicher Stützweite und gleichartiger Belastung die stärksten Durchbiegungen gleich sein müssen, so muss auch die Krümmung der beiden Biegungslinien an je 2 entsprechenden Punkten die gleiche sein. Die Voraussetzung wird z. B. in dem Falle der Fig. 46 erfüllt, wenn in den Senkrechten durch die Auflager und die Last kleine Klötze von gleicher Dicke zwischen die Balken gelegt sind. Da nun die Krümmung $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \frac{\sigma}{Ee}$, so muss an übereinstimmenden Stellen, also auch in den Mitten der beiden Balken, stattfinden:

Fig. 46.

$$1) \qquad \frac{M_1}{M_2} = \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1 e_1}{E_2 e_2},$$

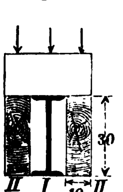
wenn die Zeichen 1 und 2 sich auf die Balken I und II beziehen. Die ganze Last P zerlegt sich für die Balken in P_1 und P_2, und diese müssen sich offenbar verhalten wie die Momente (Gl. 1), d. h.

$$2) \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2}.$$

Bei gleichem Stoffe sind die Lastantheile mit den Trägheitsmomenten, die stärksten Spannungen mit den Trägerhöhen verhältnisgleich; der niedrigere Träger schont sich hiernach (wegen seiner größeren Biegsamkeit und Nachgiebigkeit) auf Kosten des höheren (steiferen). Die Lastvertheilung war durch alleinige Anwendung der Gleichgewichts-Bedingungen nicht zu finden, ergab sich aber auf Grund der Biegungslehre. Eine solche Anordnung heißt statisch unbestimmt.

Beispiel: Der I-Träger nach Fig. 30, S. 27 von 30 cm Höhe trage gemeinsam mit 2 Holzbalken von 30 cm Höhe und je 10 cm Breite bei 4 m Spannweite eine Last in der Mitte. Die zulässigen Anstrengungen seien für Eisen und Holz 700 bezw. 70 at, die Elasticitäts-Ziffern 2 000 000 bezw. 120 000 at. Es soll die zulässige Belastung berechnet werden. Wegen der gleichen Höhe wird $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{2\,000\,000}{120\,000} = \frac{100}{6}$. Da dieses Verhältnis größer als das der zulässigen Spannungen, so wird $\sigma_1 = 700$ at maßgebend und für die Holzbalken nur $\sigma_2 = 0{,}06 \cdot 700 = 42$ at zu erreichen sein. Da $J_1 = 11\,182$, $J_2 = {}^1/_{12} \cdot 20 \cdot 30^3 = 45\,000$, so wird nach Gl. 2:

Fig. 47.



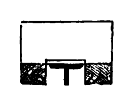
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1}{E_2}\frac{J_1}{J_2} = \frac{100}{6}\frac{11\,182}{45\,000} = 4{,}14.$$

Für den Eisenbalken wird

$\frac{P_1 l}{4} = \frac{\sigma_1 J_1}{e}$, also $P_1 = \frac{4\sigma_1 J_1}{l e} = \frac{4 \cdot 700 \cdot 11182}{400 \cdot 15} = 5218$ kg, demnach für die Holzbalken $P_2 = \frac{5218}{4{,}14} = 1260$ kg, und zusammen $P = P_1 + P_2 = 6478$ kg als zulässige gemeinsame Belastung.

Die Holzbalken hätten, unabhängig von den Eisenbalken, eine Last $= \frac{4 \cdot 70 \cdot 45\,000}{400 \cdot 15} = 2100$ kg tragen können. Will man erreichen, dass in der Balkengruppe auch die Holzbalken ihre zulässige Spannung empfangen, so muss man dafür sorgen, dass die Durchbiegungen nicht gleich, sondern nach den zulässigen Anstrengungen geregelt werden. Für den vorliegenden Belastungsfall ist, nach Gl. 5, S. 40, die Durchbiegung $f_1 = \frac{P_1 l^3}{48 E_1 J_1}$, oder, weil $\sigma_1 = \frac{P_1 l e_1}{4 J_1}$, $f_1 = \frac{1}{12}\frac{\sigma_1}{E_1}\frac{l^2}{e_1}$; ebenso $f_2 = \frac{1}{12}\frac{\sigma_2}{E_2}\frac{l^2}{e_2}$. Es muss daher die Durchbiegung des Eisenbalkens $f_1 = \frac{1}{12}\frac{700}{2\,000\,000}\frac{400^2}{15} = 0{,}31$ cm, diejenige der Holzbalken $f_2 = \frac{1}{12}\frac{70}{120\,000}\frac{400^2}{15} = 0{,}52$ cm, der Unterschied demnach 0,21 cm werden. Schneidet man das in Fig. 47 die Lasten übertragende Querstück über dem Eisenbalken um diese 0,21 cm aus (Fig. 48), so müssen bei beginnender Belastung die Holzbalken sich erst um 0,21 cm durchbiegen, bevor der Eisenbalken überhaupt zu tragen beginnt, und nun werden die Holzbalken 2100 kg aufnehmen, wenn der Eisenträger 5218 kg bekommt; die Gesammtbelastung darf daher 7318 kg, d. h. 840 kg mehr betragen als ohne diesen Ausschnitt. Aus der Geringfügigkeit des letzteren erkennt man aber auch, dass bei derartigem Zusammenwirken mehrerer Träger stets eine gewisse Unsicherheit herrscht, ob die Ergebnisse der Rechnung auch mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Ungenaue Ausführung, Unsicherheit in der Annahme der Elasticitäts-Ziffern und in der Berechnung der Durchbiegungen überhaupt können auf die Uebereinstimmung schädlich einwirken.

Fig. 48.



XI. Prismatischer, an zwei Punkten gestützter Stab unter Einwirkung von Kräftepaaren an den Enden.

A und B seien die Stützpunkte, welche eine Verschiebung verhindern, eine Drehung des Stabes aber gestatten. Wird das Kräftepaar-Moment $M_2 > M_1$ gedacht, so treten an den Stützpunkten Widerstandskräfte A und B auf, welche sich durch die Gleichung der statischen Momente zu

Fig. 49.

1) $$A = B = \frac{M_2 - M_1}{l} \text{ ergeben.}$$

An einer beliebigen Schnittstelle ist dann das Biegungsmoment

2) $$M_x = Ax + M_1 = M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_2 \frac{x}{l}.$$

Die Darstellung hiervon ist geradlinig, daher durch 2 Punkte bestimmt: Für $x = o$ wird $M_x = M_1$, für $x = l$ wird $M_x = M_2$; die Momentenfläche ist demnach ein Trapez; man hat die Endmomente aufzutragen und deren Endpunkte durch eine Gerade zu verbinden.

Es sollen nun die Winkel ω_1 und ω_2 berechnet werden, welche im gebogenen Zustande die Tangenten an die Biegungslinie bei A und B mit der ursprünglichen Stabrichtung AB einschliefsen.

Der Punkt A der Biegungslinie hat von der Tangente BA_1 die Abweichung $f = AA_1 = l\omega_2$, und für diese gilt nach Gl. 5, S. 36:

$EJl\omega_2 = \int_0^l Mx\,dx = F_M \cdot \xi =$ dem statischen Momente des Trapezes in Fig. 49 in Bezug auf die linke Seite. Da das Trapez in 2 Dreiecke zerlegt werden kann, so ergiebt sich dafür leicht:

$$M_1 \frac{l}{2}\frac{l}{3} + M_2 \frac{l}{2}\frac{2}{3} l = \frac{l^2}{6}(M_1 + 2M_2).$$

Daher ist

3) $$EJ\omega_2 = {}^1/_6\, l\,(M_1 + 2M_2) \text{ und ebenso}$$

4) $$EJ\omega_1 = {}^1/_6\, l\,(2M_1 + M_2).$$

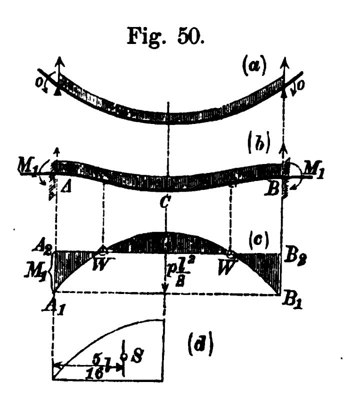
Ohne Benutzung des Trapezes hätte man auch die Intregration $\int_0^l Mx\,dx$ leicht unmittelbar ausführen können, da M durch Gl. 2 gegeben ist.

Am einfachsten wäre es in diesem Falle wohl gewesen, den Beitrag der Kraft A zu $EJf = EJl\omega_2$ nach Gl. 6, S. 36 mit $^1/_3 A l^3$ anzuschreiben und den von M_1 nach Gl. 8, S. 36 mit $^1/_2 M_1 l^2$. Dann wäre $EJl\omega_2 = {^1/_3} A l^3 + {^1/_2} M_1 l^2$ geworden, und nach Benutzung von Gl. 1 für A hätte man ebenfalls Gl. 3 erhalten.

XII. Prismatischer, an beiden Enden eingespannter Balken.

Ist ein Balken auf 2 Stützen von dem Abstande l gleichmäfsig mit p belastet, so zeigt die Biegungslinie an den Enden eine Neigung α, für welche sich leicht $EJ\alpha = {^1/_{24}} p l^3$ ergiebt (Fig. 50, a). Die überstehenden, unbelasteten Enden kann man nun durch Einwirkung von 2 gleichen Kräftepaaren M_1 hinunterbiegen, und wenn man sich M_1 allmählich anwachsend denkt, so wird jedem Werthe desselben eine bestimmte Biegungslinie, eine bestimmte Neigung ω an den Enden entsprechen. Lässt man M_1 so weit anwachsen, dass $\omega = 0$ wird, so entsteht eine Biegungslinie nach Fig. 50, b. Dieselbe Wirkung, dass die Biegungslinie an den Enden wagerecht ist, kann auch durch anfängliche feste Einspannung oder Einmauerung der Balken-Enden erreicht werden, es entstehen dadurch dieselben Kräfte A und M_1 an den Enden (Fig. 50, b). Die Auflagerdrücke $A = {^1/_2} p l$ ergeben sich aus den Gleichgewichts-Bedingungen, die einspannenden Kräftepaare M_1 (oder Einspannungsmomente) sind aber aus ihnen nicht zu finden, sind ja auch, wie aus dem geschilderten Vorgange ersichtlich, von dem Biegungszustande abhängig, daher nur mit Hülfe der Biegungslehre zu bestimmen. Das Biegungsmoment für eine Schnittstelle wäre ohne Einspannung gewesen $^1/_2 p x (l - x)$; es tritt nun aber M_1 hinzu, so dass

Fig. 50.



1) $$M_x = {^1/_2}\, p\, x\, (l - x) - M_1 \quad \text{entsteht.}$$

Der erste Theil der rechten Seite wird durch eine Parabel vom Parameter $^1/_p$ und der Pfeilhöhe $^1/_8 p l^2$ dargestellt; davon ist ein überall gleicher Werth M_1, dargestellt durch die Ordinaten einer wagerechten Geraden, abzuziehen. Die Momentenfläche besteht daher aus einer positiven Parabelfläche und einer negativen

Rechteckfläche (Fig. 50, *c*). Wenn nun eine Tangente an die Biegungslinie im Punkte A wiederum im Punkte B dieselbe berührt, so ist der gesammte Verbiegungswinkel zwischen A und B gleich Null, daher nach Gl. 5, S. 36 auch die gesammte Momentenfläche Null, d. h. die Parabelfläche $^2/_3\, l \cdot {}^1/_8\, p l^2 =$ dem Rechteck $M_1 l$, mithin

2) $$M_1 = {}^1/_{12}\, p l^2.$$

Das Biegungsmoment M_x fassen wir bei Balken mit senkrechten Lasten stets in dem Sinne positiv auf, wie es sich bei dem frei aufliegenden Balken mit 2 Stützen findet (Durchbiegung ◡); so ist es auch in Gl. 1 geschehen. An den Enden ist das Moment hiernach offenbar negativ (Biegung ◠), u. zw. ist das gröfste negative Moment das Einspannungsmoment M_1 selbst. Das Moment ändert sich von A an schnell, ist bei W gleich Null (im Abstande $0{,}2113\, l$ von A), geht ins Positive über, erreicht den gröfsten positiven Werth in der Mitte zu

3) $$M_0 = {}^1/_8\, p l^2 - M_1 = {}^1/_{24}\, p l^2,$$

worauf sich Alles symmetrisch wiederholt. Den Momenten-Nullpunkten W entsprechen Wendepunkte der Biegungslinie.

Einem frei aufliegenden Balken gegenüber ist das gröfste vorkommende Moment von $^1/_8\, p l^2$ auf $^1/_{12}\, p l^2$, also auf zwei Drittel vermindert worden; oder bei derselben Anstrengung ist die Tragfähigkeit des Balkens durch die Einspannung auf das $1^1/_2$ fache gewachsen. Erheblich ist aber die Einwirkung der Einspannung auf die stärkste, in der Mitte bei C eintretende Durchbiegung. Zieht man hier eine Tangente, so ist die Abweichung des Endes A von ihr die Durchbiegung f, und es gilt dafür $EJf = F\xi$, bezogen auf die Auflager-Senkrechte, d. h. (Fig. 50, *d*)

$$EJf = {}^2/_3 \cdot {}^1/_8\, p l^2 \cdot {}^1/_2\, l \cdot {}^5/_{16}\, l - {}^1/_2\, M_1\, l \cdot {}^1/_4\, l$$
$$= {}^1/_8\, l^2 \left({}^5/_{48}\, p l^2 - M_1\right) \quad \text{oder}$$

4) $$EJf = {}^1/_8\, l^2 \left({}^5/_{48}\, p l^2 - {}^1/_{12}\, p l^2\right) = {}^1/_{384}\, p l^4,$$

während für $M_1 = 0$ statt dessen $^5/_{384}\, p l^4$ entsteht.

Will man die Lage des Schwerpunktes der halben Parabelfläche nicht benutzen, so kann man auch EJf als Summe der Beiträge des Auflagerdrucks A, der gleichmäfsigen Belastung p und des Momentes M_1 nach den

Gl. 6—8, S. 36, berechnen, indem man sich den Stab bei C wagerecht eingespannt denkt. Es wird dann

$$EJf = {}^1\!/_3 A\,({}^1\!/_2 l)^3 - {}^1\!/_8 p\,({}^1\!/_2 l)^4 - {}^1\!/_2 M_1\,({}^1\!/_2 l)^2$$
$$= {}^1\!/_{48} p l^4 - {}^1\!/_{128} p l^4 - {}^1\!/_{96} p l^4 = {}^1\!/_{384} p l^4.$$

Auch kann man unmittelbar die Gleichung der Biegungslinie entwickeln: $EJ\frac{d^2 y}{d x^2} = A\,({}^1\!/_2 l - x) - {}^1\!/_2 p\,({}^1\!/_2 l - x)^2 - M_1$. Setzt man $A = {}^1\!/_2 p l$ und integrirt 2 Mal (wobei die Integrations-Konstanten Null werden), so wird

$$EJ\frac{dy}{dx} = {}^1\!/_2 p\,({}^1\!/_4 l^2 x - {}^1\!/_3 x^3) - M_1 x \quad \text{und}$$
$$EJy = {}^1\!/_2 p\,({}^1\!/_8 l^2 x^2 - {}^1\!/_{12} x^4) - {}^1\!/_{24} p l^2 x^2,$$

mithin für $x = {}^1\!/_2 l$:

$$EJf = {}^1\!/_{384} p l^4.$$

In der Verminderung des gröfsten Momentes ist aber mit der völlig wagerechten Einspannung noch nicht der günstigste Fall erreicht. Bedenkt man nämlich, dass für den frei aufliegenden Balken (für $M_1 = 0$) die Momente durch die von der Sehne $A_1 B_1$ der Parabel zu messenden Ordinaten dargestellt wurden (Fig. 50, c) und dass durch das allmähliche Zunehmen von M_1 die Achse sich hinaufschiebt, so erkennt man leicht, dass diese Achse für $M_1 = {}^1\!/_{12} p l^2$ schon höher liegt, als der Erreichung kleinster Momente entspricht. Für letzteren Zweck muss die Achse offenbar die Pfeilhöhe ${}^1\!/_8 p l^2$ der Parabel in der Mitte theilen, so dass

$$5)\qquad M_1 = {}^1\!/_{16} p l^2$$

und das Moment in der Mitte M_0 ebenfalls ${}^1\!/_{16} p l^2$ wird. Jede Verschiebung der Achse aus dieser günstigsten Lage bringt eine Vergröfserung eines der beiden Momente hervor. Bei diesem Momente $M_1 = {}^1\!/_{16} p l^2$ werden die überstehenden Balkenenden noch nicht ganz wagerecht liegen, sondern noch um einen kleinen Winkel ω nach oben gerichtet sein. Man findet diesen **günstigsten Einspannungswinkel**, indem man, von der Wagerechten durch C ausgehend,

$$EJ\omega = {}^2\!/_3 \cdot {}^1\!/_2 l \cdot {}^1\!/_8 p l^2 - M_1 \cdot {}^1\!/_2 l$$

setzt, was für $M_1 = {}^1\!/_{16} p l^2$ giebt:

$$6)\qquad EJ\omega = {}^1\!/_{96} p l^3.$$

Eine deutlichere Vorstellung von der Gröfse ω bekommt man, wenn man J und p durch die stärkste Spannung σ und den Abstand e der entsprechenden Stelle von der Biegungsachse aus-

drückt. Das gröfste Biegungsmoment ist gleich dem gröfsten Spannungsmomente, d. h. $^1/_{16}\, p l^2 = \sigma \frac{J}{e}$, mithin wird

$$\omega = {}^1/_6 \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}. \tag{7}$$

Ist nun bei Eisenträgern etwa $\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{3000}$ und $\frac{l}{e} = 40$, so wird $\omega = {}^1/_{450}$.

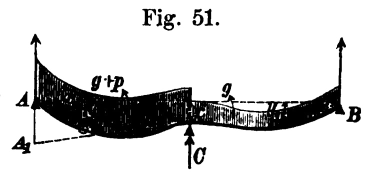
Nimmt man aber bei Holzbalken etwa $\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{1500}$ und $\frac{l}{e} = 40$, so wird $\omega = {}^1/_{225}$.

Diese Neigungen sind aufserordentlich gering, und wenn man bedenkt, dass durch ihre Anwendung das gröfste Moment (gegenüber wagerechter Einspannung) von $^1/_{12}\, p l^2$ auf $^1/_{16}\, p l^2$ herabgemindert wird, dass sie also ganz erheblichen Einfluss auf die Tragfähigkeit der Balken haben, so kommt man leicht zu dem Schlusse, dass der Spannungszustand beiderseitig eingespannter Balken von Bedingungen abhängt, die sich in der Wirklichkeit nicht mit genügender Schärfe und Sicherheit ausführen und erhalten lassen. Es ist daher nicht rathsam, sich auf den günstigen Einfluss einer wagerechten oder sonst bestimmten Einspannung zu verlassen.

XIII. Prismatischer Balken auf 3 Stützen mit stetiger, aber unsymmetrischer Belastung.

Die beiden Felder des Balkens seien von gleicher Länge l, das eine mit g, das andere mit $g + p$ für die Längeneinheit belastet (Fig. 51); die Mittelstütze liege um c unter der (wagerechten) Verbindungs-Geraden der Endstützen. Wegen der ungleichen Belastung wird die Biegungslinie über der Mittelstütze eine Neigung ω haben.

Fig. 51.



Zur Bestimmung der Auflagerdrücke eines frei aufliegenden Balkens liefern die Gleichgewichts-Bedingungen nur zwei Gleichungen (die Gleichung der wagerechten Kräfte ist nicht benutzbar, weil wagerechte äufsere Kräfte überhaupt nicht vorhanden sind). Bei einem Balken auf 3 Stützen ist daher zur

Berechnung der Auflagerdrücke eine Gleichung aus der Biegungslehre zu Hülfe zu nehmen. In dem vorliegenden Falle ergiebt sich diese am einfachsten aus den Gl. 6 und 7, S. 36.

Das linksseitige Feld kann man als bei C unter einem Winkel ω (abwärts) eingespannt ansehen. Der Endpunkt A der Biegungslinie liegt dann um $A_1 A = c + l\omega$ über der Tangente an die Biegungslinie im Punkte C. Zu dieser Hebung liefert die Einzelkraft A einen positiven Beitrag $\frac{Al^3}{3EJ}$, die stetige Belastung aber einen negativen Beitrag $-\frac{(g+p)l^4}{8EJ}$ (denn durch sie allein würde der bei C eingespannte, sonst freie Balken sich nach unten biegen). Daher ist

$$EJ(c + l\omega) = \tfrac{1}{3} A l^3 - \tfrac{1}{8}(g+p) l^4.$$

Wegen der neu hinzugetretenen Unbekannten ω muss noch eine zweite Biegungsgleichung aufgestellt werden. Betrachtet man das rechtsseitige Feld als bei C mit der Neigung ω (nach oben) eingespannt, so wird in gleicher Weise

$$EJ(c - l\omega) = \tfrac{1}{3} B l^3 - \tfrac{1}{8} g l^4.$$

Die Gleichungen liefern durch Zusammenzählen:

$$2EJc = \tfrac{1}{3}(A+B) l^3 - \tfrac{1}{8}(2g+p) l^4, \quad \text{oder}$$

$$A + B = \tfrac{3}{8}(2g+p) l.$$

Die Momentengleichung in Bezug auf C aber giebt:

$$A - B = \tfrac{1}{2} p l.$$

Aus beiden erhält man:

$$1) \qquad \boldsymbol{A = \tfrac{3}{8} gl + \tfrac{7}{16} pl + \frac{3EJc}{l^3}};$$

$$2) \qquad \boldsymbol{B = \tfrac{3}{8} gl - \tfrac{1}{16} pl + \frac{3EJc}{l^3}}.$$

Die Biegungsgleichungen liefern auch noch

$$3) \qquad \boldsymbol{EJ\omega = \tfrac{1}{48} pl^3}.$$

(Die Neigung ω ist nicht von g abhängig, weil die Last g in beiden Feldern vorhanden ist, so dass ohne das Hinzutreten von p der Winkel $\omega = 0$ sein müsste.)

Weil die Gesammtlast des Balkens $gl + (g+p)l$ von den 3 Stützen getragen wird, so findet man den Druck C der Mittel-

stütze leicht aus der Gleichung der senkrechten Kräfte zu

$$C = {}^5/_4\, gl + {}^5/_8\, pl - \frac{6\,EJc}{l^3}. \tag{4}$$

(Die Sonderfälle $p = 0$ oder $c = 0$ oder beides sind aus den Gl. 1—4 leicht zu erhalten, lassen sich aber auch durch denselben Gedankengang unmittelbar entwickeln.)

Will man die Biegungslinie der stärker belasteten, linken Hälfte berechnen, so wählt man A als Anfangspunkt und setzt

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -Ax + (g+p)\frac{x^2}{2}, \text{ daraus}$$

$$EJ\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax^2}{2} + (g+p)\frac{x^3}{6} + C.$$

Für $x = l$ wird aber $\frac{dy}{dx} = -\omega$, also

$$-EJ\omega = -\frac{Al^2}{2} + (g+p)\frac{l^3}{6} + C;$$

durch Abziehen entsteht

$$EJ\left(\frac{dy}{dx} + \omega\right) = \frac{Al^2}{2} - \frac{Ax^2}{2} - \frac{g+p}{6}(l^3 - x^3)$$

und durch Integration (wobei Const. $= 0$):

$$EJy = A\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{g+p}{6}\left(lx^3 - \frac{x^4}{4}\right) - EJ\omega x.$$

Setzt man endlich für A und ω die Werthe nach Gl. 1 und 3 ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} EJy = {} & \frac{gl^4}{48}\left(\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4}\right) + \frac{pl^4}{96}\left(3\frac{x}{l} - 7\frac{x^3}{l^3} + 4\frac{x^4}{l^4}\right) \\ & + EJ\frac{c}{2}\left(3\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Es ist besonders darauf hinzuweisen, dass die 3 Biegungsursachen g, p und c in den Gl. 1—5 je durch besondere, von einander unabhängige Glieder vertreten sind, dass sich die Einflüsse einfach über einander häufen. Waren bei einem Balken g und c bereits wirksam, war der Balken unter Einwirkung seiner Eigenlast aufgestellt und kommt nun noch eine einseitige Belastung p hinzu, so tritt dadurch eine Vermehrung der Durchbiegung um das in Gl. 5 mit p behaftete Glied ein.

Fasst man $g + p$ zu q zusammen und vertauscht p mit $q - g$, so wird aus Gl. 5:

$$6)\quad \begin{aligned} EJy &= \frac{ql^4}{96}\left(3\frac{x}{l} - 7\frac{x^3}{l^3} + 4\frac{x^4}{l^4}\right) \\ &- \frac{gl^4}{96}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right) + EJ\frac{c}{2}\left(3\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right). \end{aligned}$$

Hieraus kann man die Biegungslinie für die rechtsseitige Hälfte in Bezug auf den Anfangspunkt B leicht angeben, indem man nur q mit g vertauscht:

$$7)\quad \begin{aligned} EJy_1 &= \frac{gl^4}{96}\left(3\frac{x}{l} - 7\frac{x^3}{l^3} + 4\frac{x^4}{l^4}\right) \\ &- \frac{ql^4}{96}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right) + EJ\frac{c}{2}\left(3\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right). \end{aligned}$$

Für das arithmetische Mittel $y_0 = \frac{1}{2}(y + y_1)$ ist

$$8)\quad EJy_0 = \frac{g+q}{96}\left(\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4}\right) + EJ\frac{c}{2}\left(3\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right).$$

Dieselbe Gleichung entsteht aber auch, wenn man die Biegungslinie des Balkens unter der Annahme berechnet, dass er in seiner ganzen Länge gleichmäßig mit $g + \frac{1}{2}p$ belastet ist. Von der dieser symmetrischen Belastungsart entsprechenden Biegungslinie weicht also die unsymmetrische Biegungslinie der Gl. 6 und 7 in beiden Feldern für gleiche x um gleich viel nach unten, bezw. nach oben ab. Zu diesem Ergebnisse führt auch ohne Weiteres die Ueberlegung, dass die einseitige Belastung mit p in dem linken Felde vertauscht werden kann mit einer symmetrischen Belastung $\frac{1}{2}p$ des ganzen Trägers und einer noch hinzukommenden Belastung mit $+\frac{1}{2}p$ bezw. $-\frac{1}{2}p$ der linken und rechten Hälfte. Dann entsteht im Ganzen durch die symmetrische Belastung die Biegungslinie für $g + \frac{1}{2}p$ (Gl. 8); die Abweichungen vor dieser aber, welche durch $+\frac{1}{2}p$ und $-\frac{1}{2}p$ (aufwärts) hervorgebracht werden, sind natürlich gleich, nur theils nach unten, theils nach oben gerichtet.

XIV. Prismatischer Balken auf 3 Stützen mit einer Einzellast.

Der Träger sei im linken Felde mit einer Einzelkraft P belastet (Fig. 52); rechts muss er durch einen abwärts gerichteten Stützendruck B niedergehalten werden, weil er sonst zu einem Balken auf 2 Stützen mit frei überstehendem Ende werden würde. Der Einfluss einer etwaigen Senkung der Mittelstütze um c ist von der Belastungs-

Fig. 52.

art ganz unabhängig und kann nach den Gleichungen auf S. 48 und 49 beurtheilt werden; deshalb werden hier 3 Stützen in derselben Geraden vorausgesetzt.

Das linke Trägerfeld kann als bei C unter dem Winkel ω nach unten eingespannt betrachtet werden; P, ω und die Kraft A haben dann die Gesammtwirkung, dass der Höhenunterschied zwischen A und C gleich Null.

Betrachtet man zunächst die alleinige Wirkung von P, d. h. bei wagerechter Einspannung in C, so entsteht an der Laststelle D eine Senkung um $\frac{P(l-u)^3}{3EJ}$ und eine Neigung $\alpha = \frac{P(l-u)^2}{2EJ}$; von D bis A_2 kommt noch die Senkung um αu hinzu, so dass

$$A_1 A_2 = \frac{P}{EJ}\left\{\frac{(l-u)^3}{3} + \frac{(l-u)^2}{2}u\right\} = \frac{P(l-u)^2}{6EJ}(2l+u)$$

wird. Die Neigung ω senkt den Endpunkt weiter um $l\omega$. Die Kraft A bewirkt eine Hebung $\frac{Al^3}{3EJ}$, welche die Senkungen ausgleicht, und es wird.

$$\frac{Al^3}{3EJ} = \frac{P(l-u)^3}{6EJ}(2l+u) + l\omega.$$

Für die rechtsseitige Hälfte wird die aus der Neigung ω entstehende Hebung bei B um $l\omega$ aufgewogen durch die Abwärtsbiegung seitens der Kraft B, so dass

$$\frac{Bl^3}{3EJ} = l\omega.$$

Aus beiden Gleichungen entsteht durch Abziehen

$$A - B = \frac{P}{2}\left(1-\frac{u}{l}\right)^2\left(2+\frac{u}{l}\right).$$

Die Momentengleichung in Bezug auf C liefert aber

$$A + B = \frac{P}{2}\left(2 - 2\frac{u}{l}\right),$$

und aus beiden erhält man

1) $$A = \frac{P}{4}\left(4 - 5\frac{u}{l} + \frac{u^3}{l^3}\right)$$

2) $$B = \frac{P}{4}\left(\frac{u}{l} - \frac{u^3}{l^3}\right),$$ während dann

3) $$C = \frac{P}{4}\left(6\frac{u}{l} - 2\frac{u^3}{l^3}\right)$$

aus der Gleichung der senkrechten Kräfte folgt.

Diese Gleichungen gelten für jede Last P, die sich zwischen A und C befindet, d. h. für $u = 0$ bis $u = l$, jedoch nicht mehr für $u > l$, da ein solcher Fall mit den Grundlagen der Entwickelung nicht mehr übereinstimmt. Die Gleichungen werden aber für Lasten im rechtsseitigen Felde auch benutzbar, wenn man deren Abstand vom rechtsseitigen Endauflager mit u bezeichnet. Rechts tritt dann der Auflagerdruck A nach Gl. 1, an der linken Seite der abwärtsgerichtete Druck B nach Gl. 2 auf, während C unverändert bleibt.

Fig. 53.

Ist der Balken auf 3 Stützen im linken Felde von $u = u_1$ bis $u = u_2$ gleichmäſsig mit p belastet (Fig. 53), so kann man die Belastung eines Theilchens du als Einzellast $p\,du$ ansehen, welche dann nach Gl. 1 den Auflagerdruck

$$dA = \frac{p\,du}{4}\left(4 - 5\frac{u}{l} + \frac{u^3}{l^3}\right) \text{ bewirkt.}$$

Integrirt man die rechte Seite von $u = u_1$ bis $u = u_2$, so erhält man

$$A = \frac{pl}{4}\left(4\frac{u_2 - u_1}{l} - \frac{5}{2}\frac{u_2^2 - u_1^2}{l^2} + \frac{1}{4}\frac{u_2^4 - u_1^4}{l^4}\right)$$

und ebenso

$$B = \frac{pl}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{u_2^2 - u_1^2}{l^2} - \frac{1}{4}\frac{u_2^4 - u_1^4}{l^4}\right).$$

Setzt man (zur Probe) $u_1 = 0$, $u_2 = l$, so erhält man richtig

$$A = \frac{7}{16}pl; \qquad B = \frac{1}{16}pl$$

(vgl. Gl. 1 und 2, S. 48).

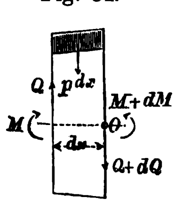
Von diesem Verfahren, die Wirkung einer stetigen Belastung aus derjenigen einer Einzellast abzuleiten, wird sehr häufig Gebrauch gemacht.

XV. Beziehung zwischen Biegungsmoment, Querkraft und Belastung; Ermittelung der zu einer gegebenen Biegungslinie gehörigen Belastungsart.

Ein Träger sei stetig mit p belastet, wobei aber p im Allgemeinen veränderlich, eine $f(x)$, sein kann. Schneidet man aus

dem Träger ein Längentheilchen dx heraus (Fig. 54), so wirkt an der einen (linksseitigen) Schnittfläche ein dem Biegungsmomente M gleiches Widerstandsmoment und eine innere Querkraft Q. (An einem Trägertheile links vom Schnitte nehmen wir ein positives Q nach unten gerichtet wie in Fig. 18, S. 18; an dem rechts vom Schnitte liegenden Trägertheile muss es daher aufwärts angebracht werden.) An dem anderen (rechtsseitigen) Schnitte treten entsprechend das Widerstandsmoment $M + dM$, die Querkraft $Q + dQ$ auf. Die Momenten-Gleichung in Bezug auf O liefert dann unter Vernachlässigung des unendlich Kleinen höherer Ordnung $^1/_2\, p \cdot dx \cdot dx$,

Fig. 54.



1) $$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Aus der Gleichung der senkrechten Kräfte aber folgt

2) $$p = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d^2 M}{dx^2}.$$

Die Querkraft ist daher die erste Abgeleitete des Biegungsmomentes (nach x genommen), die Belastung der Längeneinheit, mit negativen Zeichen gesetzt, die erste Abgeleitete der Querkraft oder die zweite Abgeleitete des Momentes. An einer Stelle, wo die Querkraft Null, hat das Moment einen gröſsten oder kleinsten Werth.

Nach Gl. 2, S. 33 ist mit Rücksicht auf die daran geschlossene Bemerkung

$$EJ\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M; \text{ demnach wird nun}$$

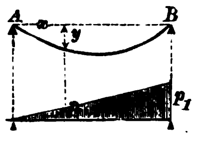
3) $$EJ\frac{d^3 y}{dx^3} = \pm Q \quad \text{und} \quad EJ\frac{d^4 y}{dx^4} = \mp p.$$

Während die Grundgleichung der Biegungslinie in dem Vorhergehenden nur benutzt wurde, um für gegebene Belastungsart die Biegungslinie zu entwickeln, kann nun nach Gl. 3 auch umgekehrt aus der Gleichung der Biegungslinie die entsprechende Belastungsart abgeleitet werden.

Beispiel: Für die Biegungslinie AB (Fig. 55) sei die Gleichung gegeben:

$$y = \frac{p_1}{12\,EJ}\left(\frac{x^5}{10\,l} - \frac{l\,x^3}{3} + \frac{7}{30}\,l^3\,x\right).$$

Fig. 55.



Dann ist $EJ\frac{dy}{dx} = \frac{p_1}{12}\left(\frac{x^4}{2\,l} - l\,x^2 + \frac{7}{30}\,l^3\right)$, ferner

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p_1}{12}\left(\frac{2\,x^3}{l} - 2\,l\,x\right) = -\frac{p_1}{6}\left(l\,x - \frac{x^3}{l}\right) = -M,$$

somit $EJ\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{p_1}{6}\left(l - \frac{3\,x^2}{l}\right) = -Q$, und

schließlich $EJ\frac{d^4y}{dx^4} = p_1\frac{x}{l} = p$. Die Belastung ist daher eine von links nach rechts gleichmäßig bis auf p_1 zunehmende.

Für $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}57735\,l$ ist $Q = 0$, mithin M am größten, u. zw. wird $M_{max} = 0{,}06415\,p_1\,l^2 = 0{,}1283\,Pl$, wenn die Gesammtlast $\frac{1}{2}\,p_1\,l = P$ gesetzt wird. (Bei gleichmäßiger Belastung wäre $M_{max} = 0{,}125\,Pl$ gewesen.) Die größte Durchbiegung liegt bei $0{,}51933\,l$, nur wenig rechts von der Mitte, und es beträgt $EJ\,y_{max} = 0{,}006524\,p_1\,l^4 = 0{,}013048\,Pl^3$. Die Durchbiegung in der Mitte wird natürlich genau so groß wie bei gleichmäßiger Belastung, nämlich $\frac{5}{384}\,\frac{Pl^3}{EJ} = 0{,}0130208\,\frac{Pl^3}{EJ}$, nur wenig kleiner als y_{max}.

Dritter Abschnitt.

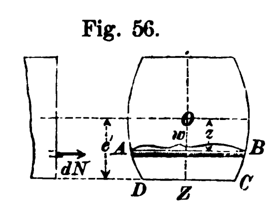
Berücksichtigung der Schubspannungen in einem prismatischen, auf Biegung beanspruchten Stabe (oder Balken).

I. Ableitung der Schubspannungen aus den Normalspannungen.

Die Schubspannung τ_y (vgl. Fig. 19, S. 19), welche bisher vernachlässigt wurde, ist abhängig von der Vertheilung der Normalspannungen über die Querschnittshöhe.

Die Kraftebene schneide den Querschnitt in der Hauptachse OZ (Fig. 56); dann muss die gesammte Querkraft Q in OZ liegen. Unterhalb der Biegungsachse werden die Zugspannungen gedacht. In einem Abstande z von der Achse sei die Querschnittsbreite w, so dass ein wagerechter Flächenstreifen die Gröfse $dF = w\,dz$ hat.

Fig. 56.



Ist die Spannung an dieser Stelle σ_x, an der Unterkante σ', so wird $\sigma_x = \frac{\sigma'}{e'} z$ und die Normalkraft an dem Flächenstreifen:

$$1)\qquad dN = \sigma_x\,dF = \frac{\sigma'}{e'}\,dF\,z = \frac{M}{J}\,dF\,z\,.$$

Die gesammte Normalkraft, welche auf den endlichen Theil $ABCD$ des Querschnitts kommt, ist demnach

$$2)\qquad N_z = \frac{\sigma'}{e'}\int_z^{e'} dF\cdot z = \frac{M}{J}\int_z^{e'} dF\cdot z = \frac{M}{J}\,S_z\,.$$

Hierin bedeutet S_z das statische Moment des Querschnittstheiles $ABCD$ in Bezug auf die Biegungsachse.

Betrachtet man den ganzen Querschnittstheil auf der einen Seite der Biegungsachse, den wir kurz die Querschnittshälfte

nennen wollen, so sei deren statisches Moment S; dann ist die gesammte Zugkraft an der einen Hälfte

$$N = \frac{\sigma'}{e'} S = \frac{M}{J} S. \tag{3}$$

Die gesammte Druckkraft ist ebenso grofs, das statische Moment beider Querschnittshälften von gleicher absoluter Gröfse.

Das Gesetz über die Vertheilung der Normalspannungen steht hiernach bei gegebenem Querschnitte völlig fest, kann aber auch bildlich dargestellt werden durch den sog. reducirten Querschnitt.*)

Die Normalkraft eines Flächenstreifens $dN = \frac{\sigma'}{e'} dFz$ kann auch geschrieben werden

$$dN = \sigma' \frac{z}{e'} w\, dz = \sigma' v\, dz,$$

wenn $v = w \frac{z}{e'}$ die im Verhältnisse $z : e'$ reducirte Querschnittsbreite genannt wird. Diese reducirte Breite v ist leicht durch Zeichnung zu finden (Fig. 57): Im Abstande e' von der Biegungsachse ziehe man eine Parallele, projicire auf diese rechtwinklig die Breite w und verbinde die Endpunkte dieser Projektion mit O durch Geraden, so schneiden diese auf der wahren Breite w die reducirte Breite v ab. Für $z = 0$ ist auch $v = 0$, für $z = e'$ ist $v = w$.

Fig. 57.

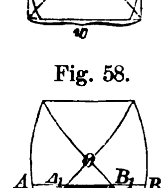


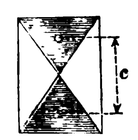
Fig. 58.

Reducirt man in derselben Weise alle Breiten, so erhält man den (auf gleiche Spannung σ') reducirten Querschnitt (Fig. 58). Denn $v\,dz$ ist ein Flächenstreifen dieser Figur, und die Normalkraft dN für einen Streifen $w\,dz$ des wahren Querschnitts beträgt $\sigma' v\, dz$, d. h. gerade so viel, als ob eine Spannung σ' sich gleichmäfsig über den reducirten Streifen erstreckte. Um nun die Normalkraft N_z für den Querschnittstheil $ABCD$ zu erhalten, braucht man nur den reducirten Theil $A_1 B_1 CD$ gleichmäfsig mit σ' behaftet zu denken. Es wird dann $N_z = \sigma' \cdot A_1 B_1 CD$, und zwar geht N_z durch den Schwerpunkt von $A_1 B_1 CD$ hindurch.

*) Vgl. A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik, S. 81. Hannover 1876. Zweite Auflage, Leipzig 1885.

Ebenso ist die gesammte Zugkraft $N = \sigma' \cdot OCD$ und geht durch den Schwerpunkt von OCD.

Fig. 59.



Für Rechtecke und aus Rechtecken zusammengesetzte, z. B. I-förmige Querschnitte besteht die reducirte Fläche offenbar aus Dreiecken und Trapezen. Die Schwerpunkte der reducirten Flächen sind in der Fig. 59 und 60 angegeben; nennt man ihren Abstand c, so ist Nc das Moment der inneren Kräfte, also gleich dem Biegungsmomente. Aus

Fig. 60.



$$Nc = M \quad \text{und}$$

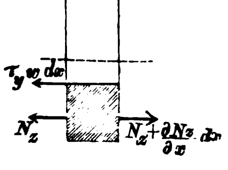
$$N = \frac{M}{J} S \quad \text{folgt dann}$$

4) $$c = \frac{J}{S} = \frac{\text{Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts}}{\text{Statisches Moment der einen Hälfte}}.$$

Beim Rechtecke von der Höhe h erkennt man ohne Weiteres aus der Figur, dass $c = {}^2/_3\, h$ sein muss; für andere Flächen ist c leicht nach Gl. 4 zu berechnen.

Schneidet man nun von dem Längentheilchen des Stabes durch einen wagerechten Schnitt (wir denken uns die Mittellinie des Stabes wagerecht, die Kraftebene senkrecht) ein Stück von der Höhe $e' - z$ ab (Fig. 61) und betrachtet von den an ihm wirkenden Kräften nur die wagerechten, so sind dies die Normalkräfte N_z und N_z + seiner partiellen Zunahme nach x, sowie die Schubkraft an dem wagerechten Schnitte $\tau_y (w dx)$. Es ist folglich

Fig. 61.



$$\tau_y w = \frac{\partial N_z}{\partial x}.$$

Weil aber nach Gl. 2 $N_z = \frac{M}{J} S_z$, so wird, wenn der Querschnitt sich nicht mit x ändert, wenn wenigstens $S_z : J$ gleich bleibt, $\partial N_z = \frac{S_z}{J} \partial M$, oder, weil nach S. 53, Gl. 1 $\partial M = Q\, \partial x$

5) $$\tau_y w = Q \frac{S_z}{J}.$$

Für $z = 0$, d. h. für einen wagerechten Schnitt längs der Achse des Stabes, sei die Querschnittsbreite w_0, die Schubspannung τ_0, dann ist

6) $$\tau_0 w_0 = Q \frac{S}{J} = \frac{Q}{c};$$

$\tau_y w$ und $\tau_0 w_0$ sind die, nicht auf Flächeneinheiten, sondern auf die Längeneinheiten bezogenen wagerechten Schubkräfte.

Das statische Moment S der einen Querschnittshälfte ist gröfser als S_z für einen anderen Querschnittstheil, und für $z = e'$ oder $z = -e''$ ist $S_z = 0$. Daher ist die wagerechte Schubkraft für die Längeneinheit an der Biegungsachse am gröfsten und nimmt nach oben und unten bis auf Null ab.

Wie sich die Schubspannung τ_y mit z ändert, hängt von der Veränderlichkeit der Querschnittsbreite ab. Wird in dem nach aufsen abnehmenden Produkte $\tau_y w$ der Faktor w nach aufsen gröfser oder bleibt er unverändert, so wird der andere Faktor τ_y nach aufsen abnehmen. Nimmt aber w nach aufsen ab, u. zw. schneller als $\tau_y w$, so wird τ_y selbst nach aufsen gröfser. In denjenigen Fällen, bei denen die Ermittelung der Schubspannung besonders wichtig, ist aber meist die Schubspannung τ_0 an der Biegungsachse am gröfsten.

Für ein Rechteck $d \times h$ (Fig. 62) ist das statische Moment des schraffirten Theiles

Fig. 62.

$$S_z = d(e - z)\frac{e + z}{2} = d\frac{e^2}{2}\left(1 - \frac{z^2}{e^2}\right);$$

weil aber $J = {}^1/_3\, F e^2$ und $w = d$, so wird

$$\tau_y w = \frac{3}{2}\frac{Q}{F} d\left(1 - \frac{z^2}{e^2}\right) \quad \text{oder}$$

$$\tau_y = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}\left(1 - \frac{z^2}{e^2}\right), \quad \text{und für } z = 0: \tag{7}$$

$$\tau_0 = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}. \tag{8}$$

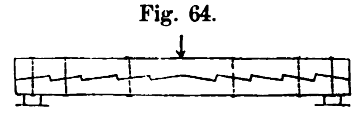
Von dem Auftreten dieser wagerechten Schubspannung τ_0 kann man sich leicht eine Vorstellung machen, wenn man einen Holzbalken von rechteckigem Querschnitte betrachtet, der auf 2 Stützen liegt und in der Mitte die Last P trägt. Die Höhe h betrage das Doppelte der Breite d, das Widerstandsmoment des Querschnittes ist dann ${}^2/_3\, d^3$. In der oberen Balkenhälfte werden die Längsfasern verkürzt, in der unteren verlängert. Zertrennt man aber den Balken durch einen wagerechten Schnitt in 2 Hälften (Fig. 63), so hat man 2 Balken, die, auf einander gelegt, sich in die Last theilen; jede Hälfte hat nun ihre besondere neutrale Faser, und an der Trennungsfläche berühren sich eine gezogene und eine gedrückte Faser, die mithin verschiedene Länge haben müssen, so dass die Endflächen

Fig. 63.

der Balken nicht mehr in gleicher Flucht liegen. Der Unterschied rührt daher, dass an der Trennungsfläche die vorher vorhanden gewesene Schubspannung τ_0 nicht mehr auftreten kann. Die Tragfähigkeit ist durch die Auftrennung vermindert worden, denn das Widerstandsmoment einer Querschnittshälfte ist $\frac{1}{6}d^3$, beider Hälften zusammen $\frac{1}{3}d^3$, d. h. halb so groſs wie beim ungetrennten Balken, und ebenso ist die Tragfähigkeit auf die Hälfte vermindert.

Sollen beide Hälften wieder so verbunden werden, dass sie annähernd wie ein einziger Körper wirken, so muss längs der Trennungsfläche der erforderliche Abscheerungswiderstand neu geschaffen werden, welcher oberhalb der Fläche die Verlängerung der Fasern hindert (also nach der Mitte hin wirkt), unterhalb aber der Verkürznng der Fasern entgegenwirkt (also nach auſsen gerichtet ist). Dies kann durch Verdübelung oder Verzahnung (Fig. 64) erreicht werden.

Fig. 64.



An der Stelle des gröſsten Moments geht die Querkraft $Q = \frac{dM}{dx}$ aus dem positiven ins negative über. Diesen Zeichenwechsel erleidet dann aber auch die Schubspannung τ_0, und es müssen bei einem verzahnten, in der Mitte belasteten Balken die Zähne zur Mitte symmetrisch angeordnet sein, die Langflächen der Zähne müssen sämmtlich nach der Mitte (der Stelle des gröſsten Momentes) hin ansteigen.

Beispiel: Ein hölzerner Balken von der Höhe $h = 20^{cm}$, der Breite $d = 12^{cm}$ und der freien Länge $l = 400^{cm}$ kann bei 100^{at} Spannung in den äuſsersten Fasern eine Last $P = 800^{kg}$ in der Mitte tragen. Der Auflagerdruck beträgt $\frac{1}{2}P$, und dies ist auch (ganz unabhängig von der Balkenlänge) die Gröſse der Querkraft Q an allen Schnitten (nur in der Mitte das Vorzeichen wechselnd). Es ist daher überall die Schubspannung in der wagerechten Mittelebene

$$\tau_0 = \frac{3}{2}\frac{Q}{F} = \frac{3}{4}\frac{P}{F} = \frac{3}{4}\frac{800}{240} = 2{,}5^{at}.$$

Diese Scheerspannung ist auch für Holz unbedeutend. Würde aber die Stützweite des Balkens vielleicht auf ein Viertel vermindert, so könnte, bei gleichen Zug- und Druckspannungen in den Längsfasern die Belastung das Vierfache betragen; dann würde τ_0 aber auch 4 Mal so groſs werden. Die Schubspannungen haben daher bei längeren und deshalb schwach belasteten Balken weniger Bedeutung als bei kürzeren, stark belasteten.

II. Vertheilung der Querkraft über die Querschnittshöhe.

Es ist $\tau_y w$ die Schubkraft für die Längeneinheit sowohl eines wagerechten wie auch eines senkrechten Schnittes. Auf ein

Höhentheilchen dz des Querschnittes kommt also die Schubkraft $\tau_y\, w\, dz$, und es muss die gesammte Querkraft

$$Q = \int_{z=-e''}^{z=e'} \tau_y\, w\, dz \quad \text{sein.}$$

Trägt man nun die verschiedenen $\tau_y\, w$ rechtwinklig zur Trägerhöhe auf, so erhält man eine Fläche, deren Inhalt $\int \tau_y\, w\, dz$, d. h. $= Q$ ist. Diese Fläche lässt dann erkennen, wie die Querkraft sich über die Höhe vertheilt.

Fig. 65.

Bei **rechteckigem** Querschnitt ist die Darstellung von

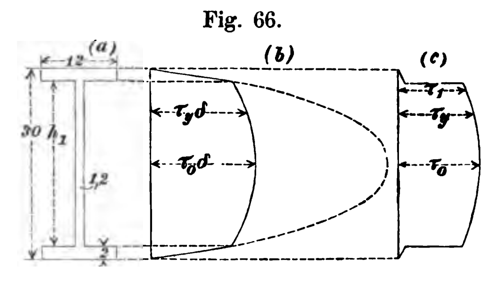
$$\tau_y\, w = {}^3/_2 \frac{Q}{h}\left(1 - \frac{z^2}{e^2}\right)$$

eine Parabel mit wagerechter Achse und der Pfeilhöhe ${}^3/_2 \frac{h}{Q}$ (Fig. 65). Der Flächeninhalt der Parabel ergiebt, wie es sein muss, ${}^2/_3\, h \cdot {}^3/_2 \frac{Q}{h} = Q$.

Die Darstellung der Schubspannung τ_y selbst ist wiederum eine Parabel, jedoch von der Pfeilhöhe $\frac{3}{2}\frac{Q}{F}$. Die Schubspannung ist daher in der Mitte der Höhe $1\,{}^1/_2$ Mal so grofs, als wenn sich Q **gleichmäfsig** über den Querschnitt F vertheilte.

Bei einem aus Rechtecken bestehenden, I-förmigen Querschnitte setzt sich, wie man leicht erkennt, die Darstellung der Schubkraft $\tau_y\, w$ aus Parabeln mit gemeinsamen Achsen, aber verschiedenen Pfeilhöhen zusammen (Fig. 66). In der Höhe der Gurten ändert sich wegen der grofsen Querschnittsbreite das statische Moment ziemlich schnell von Null bis zu einem Werthe S_1, und zwar nach parabolischem Gesetze, um dann innerhalb der dünnen Wand von der Dicke δ langsam auf S für die Mitte anzuwachsen. In denselben Verhältnissen ändert sich auch die Schubkraft $\tau_y\, w$. Um dann τ_y selbst zu erhalten, muss

Fig. 66.



man in der Höhe der Gurten mit deren grofser Breite, längs der Wand durch die kleine Stegdicke δ theilen. In den Gurten ist dann τ_y sehr klein.

Aus Fig. 66, b erkennt man, dass bei I-förmigen Trägern mit dünner Wand die Querkraft Q wesentlich von der Wand aufgenommen wird und dass sie sich über diese ziemlich gleichmäfsig vertheilt. Der ganze Inhalt der Fig. 66, b weicht nicht viel von einem Rechtecke der Breite $\tau_0 \delta$ und der Höhe h_1 (der Mittelrippe) ab, so dass man annähernd $\tau_0 \delta h_1 = Q$ oder

1) $$\tau_0 = \frac{Q}{\delta h_1} \quad \text{setzen kann.}$$

Die stärkste wagerechte und senkrechte Schubspannung τ_0 ist daher etwa so grofs, als ob die Querkraft sich gleichmäfsig über den Querschnitt der Wand vertheilte. Mit Rücksicht auf Gl. 6, S. 57 bedeutet diese Annäherung die Vertauschung der Gröfse c mit der Wandhöhe h_1.

Zum Trägheits- also auch Widerstandsmomente liefert die dünne Wand nur geringen Beitrag; man kann daher sagen: Bei Trägern mit dünner Mittelrippe und parallelen Gurten haben die letzteren besonders das Biegungsmoment M aufzunehmen, während die Querkraft Q von der Wand aufgenommen wird.

Beispiel: Für den Querschnitt Fig. 66 a mit den eingeschriebenen Ziffern ist $J = 11182$ (wozu die Gurten 9424 beitragen), $\frac{J}{e} = 745$, das statische Moment des Gurtquerschnitts allein: $S_1 = 24 \cdot 14 = 336$, das statische Moment der Querschnittshälfte: $S = 336 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 13^2 = 437$. Daher $c = 11182 : 437 = 25{,}6$, also von $h_1 = 26$ nur wenig verschieden. Hat ein Träger von diesem Querschnitte 300 cm Stützweite, so kann er bei 700 at Anstrengung der Aufsenkanten 6960 kg in der Minute tragen; es ist dann $Q = 3480$,

$$\tau_0 \delta = 3480 : 25{,}6 = 136,$$
$$\tau_1 \delta = 136 \cdot 336 : 437 = 105;$$
$$\tau_0 = 113^{at}; \quad \tau_1 = 87^{at},$$

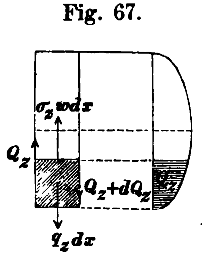
dann unmittelbar daneben in dem Gurt 8,7 at.

III. Normalspannungen an einem wagerechten Schnitte.

Diese Normalspannung σ_z ist abhängig von der Vertheilung der Querkraft Q über einen Querschnitt. — Die gesammte Last q f. d. Längeneinheit an einer beliebigen Stelle des Balkens möge

in irgend einer Art über der Höhe des Balkens vertheilt sein, indem sie vielleicht theilweise oben, theilweise unten angreift, theils auch (wie z. B. das eigene Gewicht) stetig vertheilt ist. Wird nun von dem Längentheilchen (dx) des Trägers durch einen wagerechten Schnitt wieder ein Stück von der Höhe $e' - z$ abgeschnitten (Fig. 67), so möge auf dieses ein Theil $q_z\, dx$ der Gesammtlast $q\, dx$ kommen. Nur die senkrechten Kräfte an diesem Stücke sollen jetzt betrachtet werden. An dem linken Querschnitte wirkt derjenige Theil Q_z der gesammten Querkraft Q, welcher dem Höhentheile $e' - z$ entspricht; an dem rechten Querschnitte wirkt demnach $Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial x} dx$; an dem wagerechten Schnitte tritt die Kraft $\sigma_z w\, dx$ auf. Das Gleichgewicht verlangt

Fig. 67.



$$\sigma_z w = q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial x}.$$

Nun ist aber $Q_z = \int_z^{e'} \tau_y w\, dz, \quad \tau_y w = \frac{Q}{J} S_z,$

$$\text{also} \quad Q_z = \frac{Q}{J} \int_z^{e'} S_z\, dz \quad \text{und} \quad \int_z^{e'} S_z dz = Q_z \frac{J}{Q}.$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{1}{J} \int_z^{e'} S_z\, dz = -q \frac{Q_z}{Q}$$

(wegen Gl. 2, S. 53, und unter Annahme gleich bleibenden Querschnitts). Daher wird

$$1) \qquad \sigma_z w = q_z - q \frac{Q_z}{Q}.$$

Das Verhältnis $Q_z : Q$ ist aus der Darstellung der Werthe $\tau_y w$ (Fig. 67) zu erkennen.

Läge etwa die ganze Last q auf dem Träger, so wäre $q_z = 0$, und man erhielte

$$\sigma_z w = -q \frac{Q_z}{Q};$$

in diesem Falle ist σ_z durchweg Druckspannung, die Längsfasern werden durch die Last auf einander gepresst. An der Oberkante ist $Q_z = Q$, mithin $\sigma_z w = -q$ (unmittelbarer Einfluss

der Last q). Nach unten hin nimmt der Druck allmählich bis auf Null ab.

Hinge dagegen die Last q unten an dem Träger, so wäre $q_z = q$, und man erhielte

$$\sigma_z w = q\left(1 - \frac{Q_z}{Q}\right);$$

es ist nun σ_z eine Zugspannung, die an der Oberkante Null ist und nach unten allmählich bis auf $q/_w$ zunimmt.

Eine bestimmte Vertheilung der Last über die Höhe giebt es, für welche σ_z durchweg gleich Null ist. Die Bedingung dafür würde nach Gl. 1 sein:

2) $$\frac{q_z}{q} = \frac{Q_z}{Q};$$

d. h. die Normalspannung σ_z an wagerechten Schnitten verschwindet, wenn die Last sich nach demselben Gesetze über die Trägerhöhe vertheilt wie die Querkraft Q.*)

Bei dünnwandigen hohen Trägern wird nun Q nahezu allein und ziemlich gleichmäfsig von der Mittelwand aufgenommen; will man die etwa oben liegende Last nun auch ziemlich gleichmäfsig über die Höhe der Wand übertragen, so muss man diese mit senkrechten Rippen versehen, welche die Lasten oben aufnehmen und allmählich an die Trägerwand abgeben.

IV. Hauptspannungen und Anstrengungen in irgend einem Punkte eines gebogenen Stabes.

Unter Vernachlässigung von τ_y und σ_z war σ_x eine Hauptspannung, u. zw. die einzige, daher zugleich die Anstrengung. Mit Berücksichtigung dieser Spannungen aber, die nach dem Vorstehenden berechnet werden können, erhält man aus σ_x und dem senkrechten τ_y die schiefe Spannung p_x am senkrechten Schnitte, aus σ_z und dem wagerechten τ_y die schiefe Spannung p_z am wagerechten Schnitte. p_x und p_y sind dann bekanntlich konjugirte Halbmesser der Spannungs-Ellipse für den Punkt P.

*) Vgl. A. Hänel, Die inneren Kräfte rechtwinklig belasteter Balken und die Berechnung eiserner I-Balken; Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins f. d. Königreich Hannover 1861, S. 138.

Damit steht diese Ellipse fest, mithin auch deren halbe Hauptachsen, die **Hauptspannungen** σ_1 und σ_2 des Punktes P, und aus diesen erst kann man die Anstrengungen s_1 und s_2 berechnen.

Für die rechnerische Ermittelung der Hauptspannungen soll die vereinfachende Voraussetzung $\sigma_z = 0$ gemacht werden, welche bei wichtigeren Fällen meist annähernd zutrifft.

Schneidet man dann ein unendliches kleines dreiseitiges Prisma von der Dicke $= 1$ heraus, so halten sich an diesem die in Fig. 68 angegebenen Kräfte im Gleichgewichte; σ und τ sind die Spannungen an einer beliebigen schiefen Fläche. Zerlegt man sämmtliche Kräfte nach den Richtungen von σ und τ, so erhält man für die Seitenkräfte der ersteren Richtung:

Fig. 68.

$$\sigma\, ds = \sigma_x\, dz \sin\alpha + \tau_y\, dx \sin\alpha + \tau_y\, dz \cos\alpha$$

und wegen $dz = ds \sin\alpha$, $dx = ds \cos\alpha$:

$$\sigma = \sigma_x \sin^2\alpha + 2\tau_y \sin\alpha \cos\alpha,$$

oder wegen $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$:

$$1) \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\alpha + \tau_y \sin 2\alpha.$$

In derselben Weise bekommt man

$$\tau\, ds = \sigma_x\, dz \cos\alpha + \tau_y\, dx \cos\alpha - \tau_y\, dz \sin\alpha$$

$$\text{oder} \quad \tau = \tfrac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha + \tau_y \cos 2\alpha\,.$$

Setzt man $\tau = 0$, so ergiebt sich

$$2) \qquad tg\, 2\alpha = -2\frac{\tau_y}{\sigma_x} = -\frac{\tau_y}{\frac{1}{2}\sigma_x}$$

als Bedingung für die Neigung der beiden, rechtwinklig zu einander stehenden Ebenen, an denen **Haupt**spannungen auftreten, woraus

$$\cos 2\alpha = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\tau_y}{\sigma_x}\right)^2}} = \pm \frac{\frac{1}{2}\sigma_x}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + \tau_y^2}} \quad \text{und}$$

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\tau_y}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + \tau_y^2}} \quad \text{folgen.}$$

Werden diese Werthe in Gl. 1 eingesetzt, so erhält man für die beiden Hauptspannungen selbst:

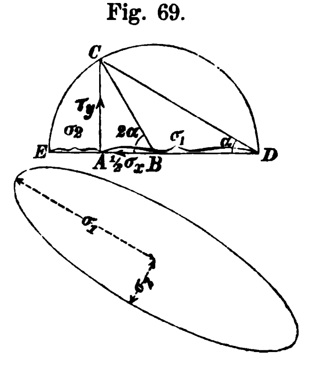
$$\sigma_{\frac{1}{2}} = {}^1/_2\,\sigma_x \pm \frac{({}^1/_2\,\sigma_x)^2 + \tau_y{}^2}{\sqrt{({}^1/_2\,\sigma_x)^2 + \tau_y{}^2}} \quad \text{oder}$$

$$3) \qquad \sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_y{}^2}\,.$$

Ist σ_x positiv, so wird σ_1 positiv, σ_2 aber negativ, und umgekehrt: die beiden Hauptspannungen sind stets von entgegengesetztem Vorzeichen. Auf derjenigen Seite von der Biegungsachse, auf welcher σ_x positiv, ist auch die gröfste Hauptspannung positiv, aber rechtwinklig dazu kommt auch eine (numerisch kleinere) Druckspannung vor, und umgekehrt. Das entgegengesetzte Vorzeichen hat zur Folge, dass die Anstrengung gröfser wird als die Spannung. Nimmt man $m = 4$ an, so erhält man für eine Stelle im Träger die Anstrengung auf Zug, indem man zur positiven Hauptspannung ein Viertel des absoluten Werthes der negativen hinzuzählt, und umgekehrt.

Die Ergebnisse der Gleichungen 2 und 3 lassen sich leicht zeichnerisch finden (Fig. 69): Man trage $BA = {}^1/_2\,\sigma_x$ und $AC = \tau_y$ auf, dann ist $BC = \sqrt{({}^1/_2\,\sigma_x)^2 + \tau_y{}^2}$ und $\measuredangle\, ABC = -2\,\alpha$ (nach Gl. 2). Das negative Zeichen ist durch die zu Fig. 68 entgegengesetzte Auftragung des Winkels berücksichtigt. Schlägt man mit BC um B einen Halbkreis, so ist $\measuredangle\, CDA = -\alpha$, CD ist daher die Richtung der einen (positiven) Hauptspannung σ_1, auf welcher σ_2 rechtwinklig steht. Ferner ist AD die Gröfse von σ_1, AE der absolute Werth der Druckspannung σ_2. Die Anstrengung auf Zug ist $AD + {}^1/_4\,AE$, die auf Druck: $AE + {}^1/_4\,AD$.

Fig. 69.



Die Spannungs-Ellipse ist durch Gröfse und Richtung von σ_1 und σ_2 ebenfalls bestimmt.

In der Höhe der Biegungsachse ($z = 0$) ist $\sigma_x = 0$, $\tau_y = \tau_0$; es wirken hier an senkrechten und wagerechten Schnitten nur

die gleichen Schubspannungen τ_0, daher wird nach S. 12 die Ellipse zu einem Spannungskreise vom Halbmesser τ_0, die Hauptspannungen $+\tau_0$ und $-\tau_0$ liegen unter 45° geneigt, und die Anstrengung auf Zug und auf Druck beträgt $^5/_4\,\tau_0$.

An der Unterkante des Trägers aber, für $z = e'$, ist $\tau_y = 0$, und es ist dann $\sigma_x = \sigma'$ die einzige Hauptspannung, also auch die Anstrengung.

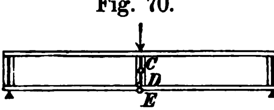
In der Biegungsachse ist hiernach die Anstrengung nur von τ_0, d. h. von der Querkraft Q abhängig, in der Aufsenkante nur von σ_x, d. h. vom Biegungsmomente M. An beliebigen Stellen dazwischen wirken aber τ_y und σ_x, d. h. Querkraft und Moment, beide in verwickelter Weise nach Gl. 3 auf die Hauptspannungen und Anstrengungen ein, und es ist im Allgemeinen nicht zu übersehen, in welcher Höhe z die stärkste Anstrengung sich finden wird. Bei bestimmter Querschnittsform aber und bei gegebenem Q und M kann man τ_y und σ_x und daraus auch die Anstrengung für jeden Punkt ermitteln.

Bei Trägern mit dünner Mittelwand aber, für welche diese Untersuchung besondern Werth hat, lässt sich wenigstens diejenige Stelle (der Höhe $z = z_1$ nach) bezeichnen, welche aufser der Achse ($^5/_4\,\tau_0$) und den Aufsenkanten (σ' und σ'') noch eine verhältnismäfsig grofse Anstrengung erwarten lässt; das ist nämlich diejenige Schicht, wo die Mittelrippe in die Gurten übergeht. Von der Biegungsachse aus nimmt bekanntlich die Spannung σ_x mit wachsendem z proportional zu und ist an der fraglichen Stelle nicht mehr viel kleiner als an der Aufsenkante; τ_y dagegen ändert sich (vgl. Fig. 66, c) längs der Höhe der Mittelrippe nur wenig, hat daher an der fraglichen Stelle fast noch den gröfsten Werth τ_0; es wirkt hier sonach eine verhältnismäfsig grofse Spannung σ_x mit einer vergleichsweise grofsen Schubspannung τ_y zusammen zur Erzeugung einer verhältnismäfsig grofsen Anstrengung. Freilich wird sich in den meisten Fällen ergeben, dass die Aufsenkanten die stärksten Dehnungen erleiden, so dass die einfache Formel $\sigma' = \frac{M e'}{J}$ mafsgebend bleibt, jedoch ist vorstehend erläutert, auf welche Stellen sich etwaige weitere Rechnungen zu erstrecken haben.

Ist ein Träger auf 2 Stützen (Fig. 70) nur durch ein Einzelgewicht belastet (welches aber, ebenso wie die Auflagerdrücke,

durch besondere Rippen über die ganze Wandhöhe vertheilt angenommen wird), so ist bekanntlich das Biegungsmoment an der Belastungsstelle am größten, die Querkraft aber von einem Auflager bis zur Belastung unveränderlich. Hat der Träger nun überall gleichen Querschnitt, so ist offenbar die Belastungsstelle die am meisten gefährdete.

Fig. 70.



Beispiel: Der auf Seite 61 behandelte I-Träger erfährt, wenn er bei 3^{m} Stützweite mit $P = 6960^{kg}$ in seiner Mitte belastet ist, in den Außenkanten des Mittelschnittes Spannungen von 700^{at}; die Schubspannungen τ_y wurden auf Seite 61 berechnet. Für die Stellen C, D und E der Fig. 70 ergeben sich dann Spannungen und Anstrengungen folgendermaßen:

Für $z = 0$: $\tau_y = 113$; $\sigma_x = 0$; $\sigma_1 = 113$; $\sigma_2 = -113$; $s_1 = 142$; $s_2 = -142$.
„ $z = 13$: $\tau_y = 87$; $\sigma_x = 607$; $\sigma_1 = 618$; $\sigma_2 = -11$; $s_1 = \mathbf{621}$; $s_2 = -165$.
„ $z = 15$: $\tau_y = 0$; $\sigma_x = 700$; $\sigma_1 = 700$; $\sigma_2 = 0$; $s_1 = \mathbf{700}$; $s_2 = -175$.

Es zeigt sich, dass in diesem Falle die stärkste Anstrengung $s_1 = 700$ in den Außenkanten der Gurten vorkommt, während sie im Punkte D nur 621 beträgt. Es rührt dies von der verhältnismäßig großen Stärke der Mittelwand her; in der Biegungsachse ist die Anstrengung ja nur 142. Würde der Pnnkt C aber auch etwa 700^{at} Anstrengung haben, dann könnte D die gefährlichste Stelle werden.

Dieser Fall tritt ein, wenn man die Stützweite des Trägers (bei gleichbleibendem Querschnitte) auf $300 \cdot 142 : 700 = 61^{cm}$ vermindert und zugleich die Belastung (umgekehrt proportional) auf $34\,230^{kg}$ vergrößert; dann bleiben die Werthe σ_x unverändert, die Werthe τ_y aber vergrößern sich proportional der Last, und es wird:

Für $z = 0$: $\tau_y = 560$; $\sigma_x = 0$; $\sigma_1 = 560$; $\sigma_2 = -560$; $s_1 = 700$; $s_2 = -700$.
„ $z = 13$: $\tau_y = 379$; $\sigma_x = 607$; $\sigma_1 = 789$; $\sigma_2 = -182$; $s_1 = \mathbf{834}$; $s_2 = -379$.
„ $z = 15$: $\tau_y = 0$; $\sigma_x = 700$; $\sigma_1 = 700$; $\sigma_2 = -0$; $s_1 = \mathbf{700}$; $s_2 = -175$.

Jetzt ist also im Punkte D die Anstrengung bedeutend stärker als in E.

Eine übermäßige Inanspruchnahme bei D (Fig. 70) kann nun vermindert werden entweder durch Verstärken der Gurten, was eine Verkleinerung von σ_x zur Folge hat, oder durch ein Verstärken der Mittelwand, wodurch τ_y kleiner wird. Aus Gründen der Herstellung empfiehlt sich meistens das letztere.

Sorgt man dafür, dass bei C, also für $z = 0$, die Anstrengung nur halb so groß, die Spannung also nur $^4/_{10}$ mal so groß werde wie bei E, oder macht man, was dasselbe ist, die Wandstärke

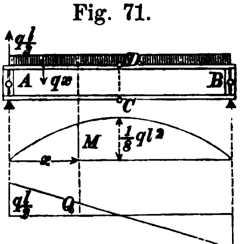
$$4) \qquad \delta \geqq \frac{Q}{0{,}4\, s \cdot h_1},$$

wenn s die zulässige Anstrengung, h_1 die Wandhöhe, so ist eine Ueberanstrengung bei D nicht zu befürchten.

Dies findet z. B statt, wenn bei dem obigen Träger $l = 2 \cdot 61 = 122^{cm}$, $P = 17\,115^{kg}$ genommen wird. Dann werden die τ_y-Werthe halb so groſs wie im letzten Falle, während die σ_x-Werthe unverändert bleiben. Die Anstrengung auf Zug im Punkte D ergiebt sich dann zu 676^{at}, im Punkte E zu 700^{at}.

Günstiger werden die Verhältnisse bei einer gleichmäſsig vertheilten Belastung q für die Längeneinheit (Fig. 71). Hier ändert sich das Biegungsmoment

Fig. 71.



$$M = \frac{q}{2}\, x\,(l - x)$$

nach parabolischem Gesetze, die Querkraft

$$Q = q\,(l/_2 - x)$$

nach linearem Gesetze. Am Auflager, wo Q und mithin auch τ_y am gröſsten, ist M und ebenso auch σ_x gleich Null; in der Mitte der Spannweite, wo M und σ_x am gröſsten, sind Q und τ_y gleich Null. Es findet in diesem Falle eine günstige Ausgleichung zwischen Moment und Querkraft statt, so dass die Anstrengung an der Auſsenkante der Mittelwand (für $z = z_1$) kleiner ausfällt als bei Wirkung einer Einzellast. Deshalb kann man hier, überall gleichen Querschnitt vorausgesetzt, der Wand in der Mitte der Höhe die volle zulässige Anstrengung s zutheilen, oder

5) $$\delta \geqq \frac{Q}{0{,}8\, s\, h_1}$$

als vorläufigen Werth für die Wandstärke nehmen, den man dann in jedem Falle noch näher auf seine Zulässigkeit prüfen mag, indem man die Anstrengungen eingehend untersucht.

Man kann auch die Anstrengung für jeden Punkt eines Trägers (nach Fig. 71) durch eine Formel ausdrücken.

Ist s die als zulässig angenommene Anstrengung, so wird die Wandstärke (weil $Q_{max} = {}^1/_2\, q\, l$):

$$\delta = \frac{q\,l}{1{,}6\, s \cdot h_1} \quad \text{und} \quad \frac{q}{\delta\, h_1} = 1{,}6\,\frac{s}{l}\,.$$

Das Widerstandsmoment des Querschnittes muss werden:

$$\frac{J}{e} = \frac{q\,l^2}{8\,s} \quad \text{und} \quad \frac{q}{2\,J} = \frac{4\,s}{l^2\,e}\,.$$

Für einen beliebigen Punkt der Trägerwand mit den Koordinaten x und z ist dann

$$\sigma_x = \frac{M z}{J} = \frac{q}{2}\,\frac{x\,(l - x)\,z}{J} = 4\,s\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{z}{e}\,;$$

$$\tau_y = \frac{Q}{\delta\, h_1}\,\frac{S_z}{S} = \frac{q\,({}^1/_2\, l - x)}{\delta\, h_1}\,\frac{S_z}{S} = 1{,}6\,s\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)\frac{S_z}{S}\,.$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{z}{e}=\alpha$, $\frac{S_z}{S}=\beta$, so wird

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = s\left\{2\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\alpha \pm \sqrt{4\frac{x^2}{l^2}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2\alpha^2+1{,}6^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)^2\beta^2}\right\}$$

und die stärkste Anstrengung an jenem Punkte $E\varepsilon = \sigma_1 - {}^1/_m\,\sigma_2$, das ergiebt für $m = 4$:

$$6)\quad E\varepsilon = \frac{3}{2}s\left\{\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\alpha+\frac{5}{3}\sqrt{\frac{x^2}{l^2}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2\alpha^2+0{,}64\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)^2\beta^2}\right\}.$$

Nimmt man nun, wie bei dem mehrfach benutzten I-Träger gilt,

$$\frac{z_1}{e}=\alpha=\frac{13}{15},\qquad \frac{S_z}{S}=\beta=\frac{336}{437},$$

so ist ${}^\beta/_\alpha = 0{,}89$, und es ergiebt sich für verschiedene Werthe von ${}^x/_l$ die Anstrengung der Wand beim Uebergange in die Gurtung folgendermaßen:

Für $\frac{x}{l}=0$,	0,1,	0,2,	0,3,	0,4,	0,5,
ist $E\varepsilon = 0{,}89\,\alpha\,s = \beta\,s$,	$0{,}877\,\alpha\,s$,	$0{,}905\,\alpha\,s$,	$0{,}948\,\alpha\,s$,	$0{,}986\,\alpha\,s$,	$1{,}0\,\alpha\,s$.

Da $\alpha = {}^{13}/_{15} < 1$, so wird die zulässige Anstrengung s nirgends überschritten, sie wird vielmehr nur an den 4 Punkten A, B, C und D der Fig. 71 erreicht.

Man kann auch Gl. 6 nach x auf Größtwerth untersuchen und findet, dass dieser für $x = {}^1/_2\,l$ eintritt.

V. Vernietung von Blechträgern.

Die Niete wirken durch ihren Abscheerungswiderstand, und dieser vertheilt sich über den Nietquerschnitt nach demselben Gesetze, welches wir für die Vertheilung der Querkraft Q über einen Trägerquerschnitt gefunden haben. In den Spannungs-Verhältnissen eines Trägers, welche durch M und Q bedingt werden, tritt nämlich, wenn M zu Null wird, nur die Aenderung ein, dass dann auch die Spannungen σ_x verschwinden; die Formeln für τ_y aber behalten ihre Gültigkeit. Die Schubspannung τ_0 in der Mitte des Nietquerschnittes ist demnach (Gl. 6, S. 57) $\tau_0 = \frac{Q_1}{J}\frac{S}{d}$, wenn Q_1 die auf das Niet kommende Kraft ist (Fig. 72). Da nun $J = F\cdot{}^1/_{16}\,d^2$, $S = {}^1/_2\,F\cdot{}^2/_3\,{}^d/_\pi$, so wird

$$\tau_0 = {}^4/_3\,\frac{Q_1}{F}$$

und die Anstrengung

$$s = \frac{5}{4}\tau_0 = \frac{5}{3}\frac{Q_1}{F}.$$

Fig. 72.

Umgekehrt ist daher bei einer zulässigen Anstrengung s die zu-

lässige Schubkraft Q_1 für einen kreisförmigen Nietquerschnitt F:

1) $$Q_1 = 0{,}6\,Fs.$$

Beim Kreise ist freilich wegen der Abnahme der Breite nach oben und unten nicht ohne Weiteres selbstverständlich, dass die stärkste Schubspannung in der Biegungsachse stattfindet (vgl. S. 58); durch eine genauere Untersuchung nach Gl. 5, S. 57 überzeugt man sich aber davon.

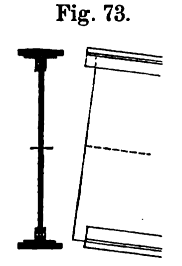
Die Erfahrung lehrt, dass der Abscheerungswiderstand eines Nietquerschnittes größer ist, als Gl. 1 angiebt, und dass man

2) $$Q_1 = 0{,}8\,Fs$$

setzen darf (als ob sich die Schubspannung gleichmäßig über F vertheilte). Man erklärt diesen Unterschied durch die Reibungswiderstände, welche meist an den zu verbindenden Theilen auftreten und dem Abscheerungswiderstande zu Hülfe kommen.

Eine Blechwand sei durch wagerechte Niete oben und unten mit je einer Gurtung verbunden, die aus 2 Winkeleisen und einem Flacheisen besteht (Fig. 73). Fehlten diese wagerechten Niete, so würde jede Gurtung, anstatt sich im Ganzen zu verlängern, bezw. zu verkürzen, sich ebenso wie die Wand für sich allein durchbiegen, es würde also bei der Biegung eine gleitende Bewegung der Gurten gegen die Blechwand stattfinden, so dass am Auflager die Enden dieser 3 Theile nicht mehr in einer Flucht liegen würden. Dieses Gleiten muss nun durch den Widerstand der Niete verhindert werden, und es kommt für die Berechnung desselben die wagerechte Schubkraft in Frage, welche zwischen der Blechwand und einem Gurt (mit Einschluss der Winkeleisen) auftritt. Diese beträgt für die Längeneinheit $\frac{Q}{J}S_1 = \frac{Q}{e}\frac{S_1}{S}$, wenn S_1 das statische Moment des Gurtquerschnitts allein, S dasjenige der einen Querschnittshälfte bezeichnen. Ist nun n die Anzahl der auf die Längeneinheit kommenden, behufs einer Trennung abzuscheerenden Nietquerschnitte F, s deren zulässige Anstrengung, so muss

Fig. 73.



$$n \cdot 0{,}8\,Fs \geqq \frac{Q}{c}\frac{S_1}{S} \text{ sein.}$$

Beispiel: Die Blechwand habe den Querschnitt 100×1 cm, die Gurtplatten seien 24×2, die Winkeleisen $8 \times 8 \times 1$ cm stark. Dann erhält man $J = 444710$, $S = 4945$, so dass $c = 90$ wird; ferner ist $S_1 = 3695$, mithin

$S_1/S = 0{,}75$. Setzt man noch $F = \frac{1}{4} 2^2 \pi = 3{,}14$ und $s = 700$, so entsteht

$$n \geq \frac{Q}{211120}.$$

Bei 1000 cm Stützweite und 700 at Anstrengung vermag der Träger eine Gesammtlast $ql = 8\sigma \frac{J}{el} = 48000$ kg zu tragen; dann ist $Q = 24000$ und $n \geqq 1:8{,}8$. Es muss daher auf 8,8 cm Länge mindestens 1 widerstehender Nietquerschnitt vorhanden sein. Wollte man aber durch Zerstörung der Niete die Blechwand zwischen den Winkeleisen herausreifsen, so müsste man an jedem Nietbolzen gleichzeitig zwei Querschnitte abscheeren, d. h. diese Niete sind doppelschnittig. Es brauchte deshalb erst auf 17,6 cm Länge ein Niet zu kommen. Aus Rücksichten der guten Ausführung wird man aber die Niete viel dichter setzen.

Zwischen den Winkeleisen und dem äufseren Flacheisen ist die Schubkraft geringer als die eben berechnete.

In ähnlichen Fällen ist hiernach die Berechnung der Nietanzahl nicht nöthig, da die Erfordernisse guter Ausführung gewöhnlich mehr Niete bedingen als die Berechnung der Schubkraft. In zweifelhaften Fällen kann man deshalb vorläufig erst einmal mit $c = h_1 =$ der freien Höhe der Blechwand (= 84 cm) und mit $S_1 : S = 1$ rechnen; es würde das hier 13,3 cm Nietabstand ergeben haben, statt 17,6 cm.

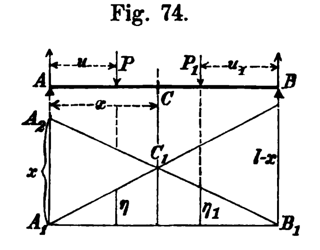
Vierter Abschnitt.

Einfluss beweglicher Belastung auf einen einfachen Balken mit 2 Stützen.

I. Einfluss beweglicher Belastung auf das Biegungsmoment. Einflusslinie.

Ein Balken auf 2 Stützen sei mit 2 beliebigen Einzellasten P und P_1 in den Abständen u und u_1 vom linken bezw. rechten Auflager versehen (Fig. 74). Zwischen beiden werde ein Schnitt C geführt, so dass P irgend eine Last links vom Schnitte, P_1 eine solche rechts vom Schnitte darstellt. Es ist dann der Auflagerdruck

Fig. 74.



$$1)\qquad A = P\left(1 - \frac{u}{l}\right) + \frac{P_1 u_1}{l},$$

das Biegungsmoment bei C:

$$2)\qquad M_x = Ax - P(x - u) = Pu\left(1 - \frac{x}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{x}{l}.$$

Wäre die Zahl der Lasten beliebig groſs, so würde statt Pu nur ΣPu für alle Lasten links vom Schnitt, und statt $P_1 u_1$ ebenso $\Sigma P_1 u_1$ für die rechtsseitigen Lasten zu setzen sein. Man kann aber dann auch P und P_1 als Mittelkräfte der Lasten links und rechts von C auffassen, weil eine Momentensumme ΣPu durch das Moment der Mittelkraft ersetzt werden kann. Die Zusammenfassung von Lasten auf einer Seite des Schnittes ist jedoch nur zulässig bei der Berechnung von sog. statisch-bestimmten Trägern, bei denen alle Kraftverhältnisse durch Momenten-Gleichungen gefunden werden können.

Man erkennt aus Gl. 2, dass jede Belastung des Trägers, rechts oder links vom Schnitt, in dem gleichen Sinne auf M_x

einwirkt, u. zw. ist die Einwirkung nicht allein mit den Lasten selbst, sondern auch mit u bezw. u_1 proportional, d. h. die Lasten erzeugen ein um so gröſseres Biegungsmoment, je näher sie der Schnittstelle gebracht werden. Sollen gegebene Belastungsgruppen daher M_x möglichst groſs machen, so müssen sie nicht allein auf dem Träger möglichst zahlreich angebracht sein, sondern es müssen auch die schwersten Lasten von beiden Seiten möglichst in die Nähe des Schnittes gebracht werden, damit Pu und $P_1 u_1$ groſs werden.

Die Einwirkung beweglicher paralleler Lasten auf Biegungsmomente, Querkräfte, Auflagerdrücke u. dgl. eines Trägers lässt sich am übersichtlichsten durch die Einflusslinien *) darstellen. Man ermittelt den Einfluss η einer über den Träger wandernden Last $P = 1$ für alle möglichen Lagen dieser Last und trägt ihn in der Richtungslinie der Last von einer Geraden $A_1 B_1$ aus als Ordinate auf. Die Endpunkte der letzteren bilden dann die Einflusslinie.

Um die Einflusslinie für das Moment M_x an einer Schnittstelle C zu erhalten, setze man in Gl. 2 zunächst $P = 0$, $P_1 = 1$, dann wird $M_x = \eta_1 = u_1 \frac{x}{l}$. Hierin ist jetzt u_1 veränderlich, x aber als gleich bleibend anzusehen. Die Darstellung der Geraden dieser Gl. erhält man, wenn man bedenkt, dass für $u_1 = 0$ auch $\eta_1 = 0$, für $u_1 = l$ aber $\eta_1 = x$ wird; hierdurch ist (indem man $A_1 A_2 = x$ abträgt) die Gerade $B_1 A_2$ bestimmt, die aber als Einflusslinie nur von B_1 bis C_1 gilt.

Setzt man dann in Gl. 2 $P = 1$, $P_1 = 0$, so wird $M_x = \eta = u\left(1 - \frac{x}{l}\right)$, was für $u = 0$: $\eta = 0$, für $u = l$: $\eta = l - x$ liefert. Daraus ergiebt sich der zweite Theil $A_1 C_1$ der Einflusslinie, welcher $B_1 A_2$ in der Senkrechten der Schnittstelle C trifft.

*) Vgl. u. A. Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen; Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1868, S. 42—50. — Weyrauch, Theorie der kontinuirlichen und einfachen Träger, S. 50 u. 101. Leipzig 1873. — Fränkel, über die ungünstigste Einstellung von Einzellasten; Civilingenieur 1876, S. 442. — Melan, Beitrag zur graphischen Behandlung der Fachwerkträger u. s. w.; Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover. — Müller-Breslau, Graphische Statik, zweite Aufl., S. 93. Leipzig 1887.

Die beliebigen Lasten P und P_1 liefern nun das Biegungsmoment $M_x = P\eta + P_1\eta_1$, und jede weitere Last P_2 giebt, mit ihrer Einfluss-Ordinate η_2 multiplicirt, den weiteren Beitrag $P_2\eta_2$.

Eine gleichmäfsige Belastung p auf einem Theile des Trägers kann als eine Gruppe von unendlich kleinen Einzellasten $p\,du$ angesehen werden. Dieses Lasttheilchen liefert den Beitrag $p\,du \cdot \eta$, die gesammte Last auf dem Trägertheile $u_2 - u_1$ daher

Fig. 75.

$$M_x = p\int_{u_1}^{u_2}\eta\,du = pF,$$

wenn F den zu der belasteten Strecke gehörigen, in Fig. 75 schraffirten Theil der Einflussfläche bezeichnet.

Die Einfluss-Ordinate bei C ist $x(1 - x/l)$; ist nun der ganze Träger mit p belastet, so ergiebt sich $M_x = p \cdot A_1 B_1 C_1$ oder der bekannte Werth

$$M_x = \tfrac{1}{2}\,p\,x\,(l - x).$$

Besteht die Belastung aus einer gleichförmigen ständigen Last g und einer ebenfalls gleichförmigen beweglichen Belastung p f. d. Längeneinheit und ist $g + p = q$, so ist das gröfste Moment an einem Schnitte

3) $$M_{x\,max} = \tfrac{1}{2}\,q\,x\,(l - x);$$

Der gröfste Werth hiervon entsteht bekanntlich für $x = \tfrac{1}{2}\,l$, nämlich

4) $$M_{max} = \tfrac{1}{8}\,q\,l^2.$$

II. Einfluss beweglicher Belastung auf die Querkraft.

Für die in Fig. 74 dargestellte Belastung war

$$A = P\left(1 - \frac{u}{l}\right) + P_1\frac{u_1}{l}.$$

Es ist dann die Querkraft an der Schnittstelle

1) $$Q_x = A - P = -P\frac{u}{l} + P_1\frac{u_1}{l}.$$

Setzt man wieder $P = 0$, $P_1 = 1$, so wird die Einfluss-Ordinate rechts vom Schnitte

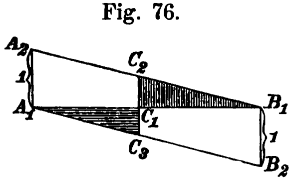
$$\eta_1 = \frac{u_1}{l}.$$

Für $u_1 = 0$ ist $\eta_1 = 0$; für $u_1 = l$ ist $\eta_1 = 1$. Macht man daher

(Fig. 76) $A_1 A_2 = 1$ (eine willkürlich gewählte Einheit), so ist $B_1 A_2$ die Darstellung von η_1, von welcher aber nur $B_1 C_2$ gilt.

Für $P = 1$ und $P_1 = 0$ wird die Einfluss-Ordinate $\eta = -\frac{u}{l}$, dargestellt durch $A_1 C_3$, parallel zu $B_1 A_2$ gezogen. Rechts vom Schnitte sind daher die Einflüsse positiv (durch senkrechte Schraffirung angedeutet), links negativ (wagerechte Schraffirung).

Fig. 76.

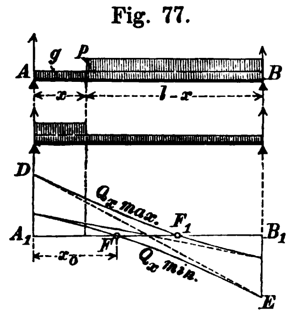


Sowohl aus Gl. 1 wie aus der Einfluss-Figur erkennt man, dass Lasten rechts vom Schnitt einen positiven, Lasten links vom Schnitt einen negativen Beitrag zu Q_x liefern, dass aber auch der Einfluss einer Last um so gröfser wird, je mehr sich dieselbe dem Schnitte nähert.

Soll daher Q_x einen möglichst grofsen **positiven** Werth erhalten, so bringe man **rechts** vom Schnitte möglichst viele Lasten an und stelle die schwersten thunlichst in die Nähe des Schnittes; links vom Schnitte muss dagegen möglichste Entlastung stattfinden. Für einen möglichst grofsen **negativen** Werth von Q_x gilt das entgegengesetzte.

Besteht die Belastung wieder aus einer gleichförmigen ständigen Last g und einer beweglichen Last p, so muss (neben der über die ganze Trägerlänge ausgedehnten Last g) für Q_{max} eine einseitige Belastung des Trägertheiles rechts vom Schnitte, für Q_{min} eine einseitige Belastung des linksseitigen Trägerstückes mit p erfolgen (Fig. 77).

Fig. 77.



Für den ersteren Belastungsfall ist
$$A = \frac{gl}{2} + \frac{p(l-x)^2}{2l}, \text{ daher}$$

$$Q_{x\,max} = g\left(\frac{l}{2} - x\right) + p\,\frac{(l-x)^2}{2l}. \tag{2}$$

Vertauscht man p mit $q - g$, so kann man auch schreiben:

$$Q_{x\,max} = q\,\frac{(l-x)^2}{2l} - g\,\frac{x^2}{2l}. \tag{2a}$$

Vertauscht man nun noch die Belastungen q und g rechts und links vom Schnitte, so entsteht der Belastungszustand für $Q_{x\,min}$, so dass man aus Gl. 2a ohne Weiteres erhält

$$Q_{x\,min} = g\,\frac{(l-x)^2}{2l} - q\,\frac{x^2}{2l}, \tag{3}$$

was man aber auch schreiben kann

$$Q_{x\,min} = g\left(\frac{l}{2} - x\right) - p\,\frac{x^2}{2l}. \tag{3a}$$

Im Besonderen erhält man:

Für	$x = 0$	$^1/_2\, l$	l
$Q_{x\,max} =$	$^1/_2\,(g+p)\,l$	$^1/_8\,pl$	$-\,^1/_2\,gl$
$Q_{x\,min} =$	$^1/_2\,gl$	$-\,^1/_8\,pl$	$-\,^1/_2\,(g+p)\,l.$

Die Darstellungen von $Q_{x\,max}$ und $Q_{x\,min}$ sind Parabeln vom Parameter $^l/_p$, deren Achsen senkrecht aufwärts bezw. abwärts gerichtet sind, deren Scheitel um $l\,^g/_p$ aufserhalb der Spannweite nach rechts bezw. links, und um $^1/_2\,gl\,(1 + {}^g/_p)$ unter bezw. über der Achse liegen. Die Punkte F und F_1, in denen die Kurven die Achse schneiden, liegen symmetrisch zur Mitte; man findet ihren Abstand x_0 vom nächsten Auflager, indem man in Gl. 3a $Q_{x\,min} = 0$ und $x = x_0$ setzt, zu

$$x_0 = l\,^g/_p\left(-1 + \sqrt{1 + {}^p/_g}\right). \tag{4}$$

Links von F ist die Querkraft stets positiv (als innere Spannkraft am Stücke links vom Schnitte nach unten gerichtet); rechts von F_1 ist es genau umgekehrt; zwischen F und F_1 aber ist die Querkraft bei wechselnder Belastung bald positiv, bald negativ, d. h. bald abwärts, bald aufwärts gerichtet.

Hätte man bei der Berechnung von Q_x nur volle Belastung berücksichtigt, so wäre die Darstellung von Q_x eine Gerade DE, welche sich bei D und E den Parabeln tangential anschliefst. Der Abstand der Geraden von den Kurven zeigt, in welchem Mafse die Querkraft bei einseitiger Belastung gröfser wird als bei voller Belastung.

III. Querschnitts-Abmessung eines Trägers gleichbleibender Höhe auf 2 Stützen mit beweglicher Last.

Das Widerstandsmoment in der Mitte des Balkens ist nach dem gröfsten Momente $^1/_8\,ql^2$ zu bemessen, mithin

$$\frac{J}{e} = \frac{ql^2}{8s}, \tag{1}$$

wenn s die zulässige Anstrengung. Die größte Querkraft kommt am Auflager vor und beträgt $\frac{1}{2} q l$. Nennt man an dieser Stelle, u. zw. in der Höhe der Biegungsachse, die Anstrengung s_1, so wird die Blechstärke

$$\delta = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{q l}{2 h_1 s_1}.$$

Bei ruhender gleichmäßiger Belastung konnte wegen der günstigen Ausgleichung zwischen Moment und Querkraft $s_1 = s$ gesetzt werden (s. S. 68). Bei beweglicher Last nimmt die Querkraft vom Auflager nach der Mitte zwar auch erheblich ab (auf weniger als $\frac{1}{4}$ des größten Werthes), aber doch nicht ganz auf Null. Man nehme daher vorläufig $s_1 = \frac{3}{4} s$, bestimme einstweilen

$$\delta = \frac{5}{6} \frac{q l}{h_1 s} \tag{2}$$

und behalte die hiernach berechnete Wandstärke über die ganze Balkenlänge bei; es wird dann in den meisten Fällen auch in den beiden Schichten, in welchen die Mittelrippe sich den Gurtungen anschließt, die Anstrengung den Werth s nicht überschreiten. Eine Prüfung ist an jeder Stelle leicht ausführbar, indem man σ_x nach dem größten Momente, τ_y nach der größten Querkraft an der betreffenden Stelle berechnet und aus beiden die Anstrengung nach S. 65 ermittelt. Dabei rechnet man freilich etwas zu ungünstig, da das größte Moment und die größte Querkraft für einen Schnitt nicht bei einer und derselben Belastungsart vorkommen. Die stärkste Anstrengung in einem Punkte wird streng genommen bei einer Belastungsart eintreten, die zwischen voller und einseitiger Belastung bis zum Schnitte liegt; eine genaue Untersuchung dieser Belastungsart ist aber wegen der verwickelten Form der Gleichung für die Anstrengung so schwierig, dass man die etwas ungünstigere Rechnung vorzieht.

Fünfter Abschnitt.

Träger überall gleichen Querschnittes auf beliebig vielen Stützen.

I. Entwickelung der Grundgleichungen nach dem Verfahren von Clapeyron.

Ein Träger auf mehr als 2 Stützen ist statisch unbestimmt und kann nur mit Hülfe der Biegungslehre berechnet werden. Einzelne einfache Fälle wurden schon als Beispiele für die Anwendung der Gleichung der Biegungslinie untersucht, u. zw. wurden beim Balken auf 3 Stützen die Auflagerdrücke als Unbekannte in die Rechnung eingeführt, aus denen sich dann das Biegungsmoment an jeder Stelle, folglich auch dasjenige an der Mittelstütze ergab.

Für die allgemeinere Behandlung der Träger auf beliebig vielen Stützen ist es zweckmäfsiger, nach dem vom franz. Ingenieur Clapeyron 1857 angegebenen Verfahren die Auflagerdrücke zunächst aus der Rechnung fern zu halten und dafür die Biegungsmomente an den Stützen, die sog. Stützenmomente, als Unbekannte einzuführen. Man erreicht dies, indem man unmittelbar rechts von der einen Stütze und unmittelbar links von der (nach rechts) folgenden Stütze einen Schnitt führt und dadurch ein Trägerfeld herausschneidet, an welchem Auflagerdrücke nicht vorkommen.

Denkt man sich den gegebenen, ununterbrochen durchgehenden Balken unter Beibehaltung der gegebenen Belastungen über jeder Mittelstütze durchschnitten, so zerfällt er in lauter einfache, statisch bestimmte Träger auf 2 Stützen, die Stützenmomente werden zu Null. Die für diesen durchschnittenen Balken gültigen Biegungsmomente, Querkräfte, Auflagerdrücke usw.

werden kurz als einfache Momente, Querkräfte usw. bezeichnet, und es werden die am durchgehenden Balken vorkommenden entsprechenden Gröfsen auf die einfachen zurückgeführt.

Einzuführende Bezeichnungen:

Die Stützen werden mit

$0, \quad 1, \quad 2, \ldots n-1, \quad n, \quad n+1 \ldots$ numerirt,

die einzelnen Stützweiten mit

$l_1, \quad l_2, \ldots \quad l_n, \quad l_{n+1} \ldots$

Die Verbindungsgerade je zweier benachbarten Stützen habe gegen die Wagerechte die Neigungswinkel:

$\beta_1, \quad \beta_2, \ldots \quad \beta_n, \quad \beta_{n+1} \ldots$

An den Träger-Enden sind die Stützenmomente Null, an den Mittelstützen seien sie

$M_1, \quad M_2, \ldots M_{n-1}, \quad M_n, \quad M_{n+1}, \ldots,$

u. zw. positiv gedacht, wenn die Biegungslinie an der Stütze ihre konvexe Seite nach oben kehrt. In jedem Trägerfelde werde eine Einzellast P angenommen, welche die Ziffer des Feldes (l_n) trägt, also P_n; dieselbe sei von der nächsten linken bezw. rechten Stütze um a_n bezw. b_n entfernt. Gleichförmig vertheilte Lasten seien stets über ganze Feldlängen erstreckt; im Felde l_n betrage sie p_n. Die Endauflagerdrücke seien A und B, die der Mittelstützen $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$

Greifen an den Enden des Stabes von der Länge l_n die Momente M_{n-1} bezw. M_n an (Fig. 78), so werden dadurch für das Gleichgewicht die Widerstände

Fig. 78.

1) $$D_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}$$

an den Enden bedingt.

An beliebiger Stelle entsteht dadurch das Moment

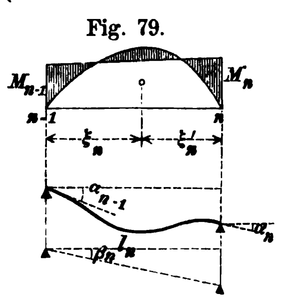
$$M_x = -D_n x - M_{n-1} = -M_{n-1}\left(1 - \frac{x}{l_n}\right) - M_n \frac{x}{l_n}.$$

Dieser Werth kommt nun zu einem einfachen Momente M'_x als Folge der Stützenmomente hinzu, und man erhält als Gesammtmoment für irgend eine Belastungsart

2) $$M_x = M'_x - M_{n-1}\left(1 - \frac{x}{l_n}\right) - M_n \frac{x}{l_n}.$$

Die Darstellung davon ergiebt sich einfach (Fig. 79): Ist die Darstellung von M_x' irgend eine Figur (z. B. eine Parabel für gleichmäßsige Belastung, ein Dreieck für eine Einzellast), so braucht man nur auf den Stützensenkrechten nach derselben Seite M_{n-1} bezw. M_n aufzutragen und deren Endpunkte durch eine Gerade zu verbinden, um in den Ordinatenstücken zwischen der Kurve für M_x' und der letzteren Geraden die Werthe M_x zu erhalten.

Fig. 79.



Der Flächeninhalt der einfachen Momentenfläche für l_n sei F_n, ihr Schwerpunkt habe vom Punkte $n-1$ den Abstand ξ_n, vom Punkte n den Abstand ξ_n'. Hat nun die Biegungslinie am Punkte $n-1$ die Neigung α_{n-1}, am Punkte n die Neigung α_n, so ist nach Gl. 5, S. 36

$$3)\qquad EJ(\alpha_{n-1}-\alpha_n)=\int_0^{l_n} M_x dx = F_n - M_n\frac{l_n}{2} - M_{n-1}\frac{l_n}{2},$$

denn $\int M_x dx$ ist die ganze Momentenfläche, welche sich als Differenz der einfachen Fläche F_n und dem Trapeze der Stützenmomente ergiebt.

Der Höhenunterschied der Punkte n und $n-1$ ist aber $l_n\beta_n$, die senkrechte Abweichung des Punktes n von der Tangente an die Biegungslinie im Punkte $n-1$ beträgt daher $l_n\alpha_{n-1}-l_n\beta_n$ nach oben; mithin wird nach Gl. 5, S. 36

$$EJl_n(\alpha_{n-1}-\beta_n)=\int_0^{l_n} M_x(l_n-x)\,dx$$
$$= F_n\xi_n - M_n\frac{l_n}{2}\frac{l_n}{3} - M_{n-1}\frac{l_n}{2}\frac{2}{3}l_n.$$

Hieraus folgt

$$4)\qquad EJ\alpha_{n-1}=EJ\beta_n + F_n\frac{\xi_n}{l_n} - M_n\frac{l_n}{6} - M_{n-1}\frac{l_n}{3}.$$

Für das Feld l_{n+1} muss aber eine entsprechende Gleichung gelten, die man erhält, wenn man n mit $n+1$ vertauscht:

$$EJ\alpha_n = EJ\beta_{n+1} + F_{n+1}\frac{\xi_{n+1}}{l_{n+1}} - M_{n+1}\frac{l_{n+1}}{6} - M_n\frac{l_{n+1}}{3}.$$

Werden die beiden letzten Gleichungen von einander abgezogen, so entsteht eine neue Gleichung, die auf der linken Seite mit

Gl. 3 übereinstimmt, so dass auch die rechten Seiten einander gleich sein müssen. Wird die so erhaltene Gleichung möglichst zusammengezogen und nach den Stützenmomenten geordnet, und bedenkt man, dass $l_n - \xi'_n = \xi_n$, so ergiebt sich:

$$\text{I)} \quad M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = 6 F_n \frac{\xi_n}{l_n} + 6 F_{n+1} \frac{\xi'_{n+1}}{l_{n+1}} + 6 EJ(\beta_{n+1} - \beta_n).$$

Die ersten beiden Glieder der rechten Seite sind von der Belastung abhängig. Befindet sich in jedem Felde eine Einzellast, so wird F_n ein Dreieck (Fig. 80) von der Höhe $P_n \frac{a_n b_n}{l_n}$, daher $F_n = {}^1/_2\, P_n\, a_n\, b_n$; der Abstand des Schwerpunktes von der Stütze $n-1$ wird $\xi_n = {}^1/_2\, l_n - {}^1/_3\, ({}^1/_2\, l_n - a_n) = {}^1/_3\, (l_n + a_n)$, daher

$$6 \frac{F_n \xi_n}{l_n} = P_n \frac{b_n}{l_n} a_n (l_n + a_n).$$

Fig. 80.

In gleicher Weise erhält man

$$6 \frac{F_{n+1} \xi'_{n+1}}{l_n} = P_{n+1} \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}} b_{n+1} (l_{n+1} + b_{n+1}).$$

Gl. I geht dann über in

$$\text{II)} \quad M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = P_n \frac{b_n}{l_n} a_n (l_n + a_n) + P_{n+1} \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}} b_{n+1} (l_{n+1} + b_{n+1}) + 6 EJ(\beta_{n+1} - \beta_n).$$

Bei mehreren Lasten in jedem Felde würde jede zu dem betreffenden Gliede in Gl. II ihren Beitrag liefern, und die ersten beiden Glieder der rechten Seite würden werden:

$$\frac{1}{l_n} \sum P_n \frac{b_n}{l_n} a_n (l_n + a_n) \quad \text{bezw.}$$

$$\frac{1}{l_{n+1}} \sum P_{n+1} \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}} b_{n+1} (l_{n+1} + b_{n+1}).$$

Bei gleichmäßiger Belastung ganzer Felder wird F_n eine Parabelfläche der Pfeilhöhe ${}^1/_8\, p_n\, l_n^2$, daher $F_n = {}^1/_{12}\, p_n\, l_n^3$, $\xi_n = \xi'_n = {}^1/_2\, l_n$; folglich $6 F_n \frac{\xi_n}{l_n} = {}^1/_4\, p_n\, l_n^3$, und Gl. I wird:

$$\text{III)} \quad M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = {}^1/_4\, p_n l_n^3 + {}^1/_4\, p_{n+1} l_{n+1}^3 + 6 EJ(\beta_{n+1} - \beta_n).$$

Sind Einzellasten und stetige Lasten gleichzeitig vorhanden, so hat man den Gliedern mit P in Gl. II diejenigen mit p in Gl. III hinzuzufügen.

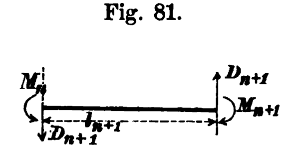
Das letzte Glied in diesen Gleichungen hängt von der gegenseitigen Höhenlage der Stützen ab. Liegen dieselben in einer Geraden, so wird das Glied zu Null.

Die rechten Seiten der Gl. I, II und III enthalten gegebene Gröfsen, die linken Seiten dagegen die unbekannten Stützenmomente. Hat nun der durchgehende Träger r Felder, also $r + 1$ Stützen und liegt er an den Enden frei auf, so dass hier keine Stützenmomente auftreten, so hat man $r - 1$ unbekannte Stützenmomente zu bestimmen. Die dafür erforderlichen $r - 1$ Gleichungen bekommt man, wenn man der Reihe nach $n = 1$, $n = 2, \ldots$ bis $n = r - 1$ setzt und mit diesen wechselnden Ziffern jedes Mal die der Belastungsart des Trägers entsprechenden allgemeinen Gleichungen I, II oder III aufschreibt.

Mit der Auffindung der Stützenmomente sind die in der statischen Unbestimmtheit liegenden Rechnungs-Erschwerungen überwunden, die weiteren Ermittelungen erfolgen nach bereits aus dem Vorstehenden bekannten Verfahren.

Zur Bestimmung der Auflagerdrücke ist zu bedenken, dass, einfachen Trägern gegenüber, zu den gegebenen Lasten die Stützenmomente hinzugekommen sind, die man sich als Kräftepaare, an den Enden ursprünglich einfacher Träger angreifend, denken kann. Nach Fig. 78 wird durch die alleinige Wirkung dieser Kräftepaare am Trägerfelde l_n eine Auflagerkraft $D_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}$ bedingt, welche am Stützpunkte n aufwärts wirkt. Am Trägerfelde l_{n+1} entstehen (Fig. 81) in gleicher Weise Auflagerkräfte $D_{n+1} = {}^1/_{l_{n+1}} (M_{n+1} - M_n)$, u. zw. am Punkte n abwärts wirkend. Die alleinige Wirkung der Stützenmomente bedingt daher am Stützpunkte n einen Druck D_n aufwärts, einen Druck D_{n+1} abwärts, mithin im Ganzen $D_n - D_{n+1}$ aufwärts, und dieser Werth kommt zu dem **einfachen** Auf-

Fig. 81.



lagerdrucke C'_n der Stütze n hinzu. Es wird daher der Stützendruck des Punktes n am durchgehenden Träger

$$C_n = C'_n + D_n - D_{n+1} \quad \text{oder}$$

$$\text{IV)} \qquad C_n = C'_n - \frac{M_{n-1}}{l_n} + M_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) - \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Das erste auf C'_n folgende Glied ist die Entlastung des Punktes n durch das Stützenmoment bei $n-1$, das dritte diejenige durch das Moment bei $n+1$, das zweite die Entlastung der beiden benachbarten Stützpunkte durch M_n, welche eine Mehrbelastung des Punktes n um den gleichen Betrag bedingt.

Auf der Endstütze 0 findet nur das erste Feld l_1 sein Auflager, so dass hier nur die Kraft D_1 abwärts zu dem einfachen Auflagerdrucke A' hinzukommt, und weil $M_0 = 0$, so wird einfach $D_1 = M_1 : l_1$, mithin

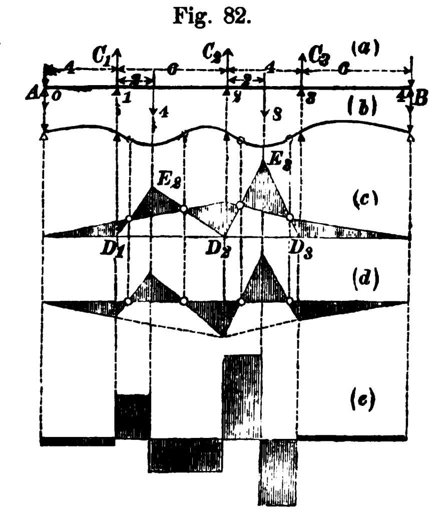
$$\text{IV a)} \qquad A = A' - \frac{M_1}{l_1}.$$

Das Biegungsmoment M_x an beliebiger Stelle ist schon durch Gl. 2, S. 79 bestimmt, welche des Zusammenhanges wegen hier wiederholt werden möge:

$$\text{V)} \qquad M_x = M'_x - M_{n-1}\left(1 - \frac{x}{l_n}\right) - M_n\frac{x}{l_n};$$

die Aufzeichnung davon war in Fig. 79, S. 80 gegeben. Das Vorzeichen vor M_x ist positiv angenommen, wenn die Biegungslinie an der betr. Stelle ihre konvexe Seite nach unten kehrt, wie beim einfachen Träger, während für positive Stützenmomente das Entgegengesetzte eingeführt wurde.

Fig. 82.



Die Querkraft ergiebt sich als die Abgeleitete von M_x zu

$$\text{VI)} \quad Q_x = Q'_x + \frac{M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n}{l_n}.$$

Beispiel: Ein Balken überall gleichen Querschnitts liege auf 5 Stützen in gleicher Flucht (Fig. 82), so dass $\beta_{n+1} - \beta_n$ durchweg verschwindet. Die Feldweiten seien

$$l_1 = 4^m; \; l_2 = 6^m; \; l_3 = 4^m; \; l_4 = 6^m.$$

Im ersten und letzten Felde befinde sich keine Last, im zweiten Felde eine Einzellast $P_2 = 4^t$ in dem Abstande $a_2 = 2^m$ vom Punkte 1, im dritten Felde eine Last $P_3 = 8^t$ in der Mitte. Drei Stützenmomente M_1, M_2 und M_3 sind zu berechnen, man hat daher Gl. II 3 Mal anzuwenden, für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

$$n = 1 \text{ giebt: } 0 + 2M_1(4+6) + M_2 \cdot 6 = 0 + \frac{4 \cdot 2}{6} 4(6+4);$$

$$n = 2: \; M_1 \cdot 6 + 2M_2(6+4) + M_3 \cdot 4 = \frac{4 \cdot 4}{6} 2(6+2) + \frac{8 \cdot 2}{4} 2(4+2);$$

$$n = 3: \; M_2 \cdot 4 + 2M_3(4+6) + 0 = \frac{8 \cdot 2}{4} \cdot 2(4+2) + 0.$$

Diese Gleichungen liefern:

$$M_1 = 1{,}5448^{\text{mt}}; \quad M_2 = 3{,}7395^{\text{mt}}; \quad M_3 = 1{,}6521^{\text{mt}}.$$

Die einfachen Auflagerdrücke sind:

$$A' = 0; \quad C_1' = 2^2/_3; \quad C_2' = 5^1/_3; \quad C_3' = 4; \quad B' = 0.$$

Nach Gl. IVa ist dann

$$A = 0 - \frac{1{,}5448}{4} = -0{,}3862^t;$$

Nach Gl. IV ist ferner:

$$C_1 = 2\,^2/_3 - 0 + 1{,}5448\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) - \frac{3{,}7395}{6} = 2{,}6871^t;$$

ebenso: $$C_2 = 5\,^1/_3 - \frac{1{,}5448}{6} + 3{,}7395\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1{,}6521}{4} = 6{,}2210^t;$$

ebenso: $$C_3 = 4 - \frac{3{,}7395}{4} + 1{,}6521\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) - 0 = 3{,}7535^t;$$

endlich: $$B = 0 - \frac{1{,}6521}{6} = -0{,}2754^t.$$

Als Probe gilt: $-A - B + 4 + 8 = C_1 + C_2 + C_3$. (Selbstverständlich hätte man die letzten beiden Auflagerdrücke C_3 und B nach Berechnung der anderen auch mittels der Gleichgewichts-Bedingungen finden können.)

Da A und B (wegen des Fehlens der Lasten in den Endfeldern) negativ sind, müsssen an den Balkenenden umgekehrte Stützen angebracht sein, welche den Balken niederhalten; andernfalls würden die beiden Enden sich ohne jede Krümmung schräg in die Höhe strecken, und es würde dann ein Balken auf nur 3 Stützen vorliegen.

In Fig. 82, *c* sind die Momente M_x dargestellt. In den Endfeldern sind die einfachen Momente Null, die Momentenflächen schrumpfen zur Achse zusammen. Für die Mittelfelder entstehen die Dreiecke $D_1\,E_2\,D_2$ und $D_2\,E_3\,D_3$ als einfache Momentenflächen; die Höhen derselben sind $5^1/_3$ bezw. 8^{mt}. Auf den Auflager-Senkrechten sind nun, ebenfalls nach oben, die berechneten Stützenmomente aufgetragen und deren Endpunkte durch eine gebrochene Linie verbunden. Daraus entstehen die schraffirten Darstellungen von M_x. Wo die Ordinaten der Momentenfläche Null sind, liegen Momenten-Nullpunkte, denen Wendepunkte der Biegungslinie (Fig. 82, *b*) entsprechen. Die Neigungen der Biegungslinie über den Stützen lassen

sich nach Gl. 4 (S. 80) berechnen. Werden die Momenten-Ordinaten sämmtlich von einer geraden Achse aus abgetragen, so entsteht Fig. 82, *d*. Die größten negativen Momente sind die Stützenmomente, die größten positiven liegen an den Laststellen, das überhaupt größte unter der Last 8 ᵗ; es beträgt

$$8 - \tfrac{1}{2}(M_2 + M_3) = 5{,}3042 \text{ mt}.$$

Die Querkraft Q_x (Fig. 82, *e*) ist am linken Auflager gleich dem Auflagerdruck A, mithin wie dieser negativ; sie ändert sich nicht, solange die Momenten-Linie in derselben Geraden verläuft. Bei nach rechts steigender Momentenlinie (*d*) ist $Q_x > 0$ und umgekehrt. Den Knicken der Momentenlinie an den Angriffsstellen der Einzelkräfte entsprechen plötzliche Aenderungen von Q_x, und zwar immer um die Größe jener Einzelkraft; jede aufwärts gerichtete Kraft vergrößert Q_x, und umgekehrt. Sonach wird rechts von der Stütze 1: $Q_x = A + C_1 = -0{,}3862 + 2{,}6871 = 2{,}3009$ ᵗ; die weiteren Q_x ergeben sich in gleicher Weise; an der Stütze 4 wird $Q_x = -B = 0{,}2754$ ᵗ.

Beispiel: Ein Träger auf 4 Stützen, die in einer Geraden liegen (Fig. 83), sei in allen 3 Feldern mit derselben Last p gleichmäßig belastet; die Weite der Mittelöffnung sei l_2, die der Seitenöffnungen je l_1. Dann ist wegen der symmetrischen Anordnung $M_2 = M_1$, mithin nur M_1 nach Gl. III (mit $n = 1$) zu bestimmen:

$$0 + 2\,M_1(l_1 + l_2) + M_1 l_2 = \tfrac{1}{4} p l_1^3 + \tfrac{1}{4} p l_2^3.$$

Dies giebt

$$M_1 = \frac{p}{4} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{2 l_1 + 3 l_2};$$

$$A = B = \frac{p l_1}{2} - \frac{M_1}{l_1}; \quad C = p(l_1 + \tfrac{1}{2} l_2) - A$$

(nach der Gleichung der senkrechten Kräfte). Der klareren Uebersicht wegen seien nun gleiche Weiten l angenommen: dann wird

$$M_1 = \tfrac{1}{10} p l^2; \quad A = \tfrac{4}{10} p l; \quad C = \tfrac{11}{10} p l.$$

Die einfachen Momentenflächen sind Parabeln vom Parameter $1/p$ und der Pfeilhöhe $\tfrac{1}{8} p l^2$; das Trapez der Stützenmomente bestimmt mit den Parabeln die wahren Momente M_x (Fig. 83, *c*), die, (Fig. 83, *d*) von einer Achse aus abgetragen, wiederum Parabeln von demselben Parameter, nur mit verschobenen Scheiteln ergeben.

Fig. 83.

An beliebiger Schnittstelle des ersten Feldes ist die Querkraft $Q_x = A - p x$. Die Darstellung davon (Fig. 83, *e*) ist eine Gerade mit dem Gefälle p f. d. Längeneinheit, und für die anderen Felder ergeben sich ebenfalls gerade Linien mit einem Gefälle = der Belastung. Im ersten Felde ist an der Stütze 0 die Querkraft $= A = \tfrac{4}{10} p l$, geht bei $x = \tfrac{4}{10} l$ durch Null ins Negative und hat an der Stütze 1 den Werth $-\tfrac{6}{10} p l$, wo dann plötzlich eine Vergrößerung um $C = \tfrac{11}{10} p l$, d. h. auf $+\tfrac{5}{10} p l$ eintritt. Wo $Q_x = 0$, hat M_x

analytische Maxima, wo Q_x sprungweise aus $+$ in $-$ übergeht (oder umgekehrt), hat M_x relativ größte Werthe, die keine analytische Maxima (mit der Abgeleiteten $= 0$) sind, sondern die nur von einer Unstetigkeit der Momenten-Funktion herrühren.

Im Endfelde ist $M_x = Ax - {}^1/_2 p x^2$; diese Funktion erreicht für $x = \frac{A}{p}$ (hier $= {}^4/_{10}\, l$) den Werth $M_{max} = \frac{A^2}{2p}$ (hier $= {}^8/_{100}\, p l^2$). Die Stelle dieses Größtwerthes liegt in der Mitte zwischen 2 Momenten-Nullpunkten. Bei $x = {}^8/_{10}\, l$ geht M_x ins Negative und wächst nun schnell bis zum Stützenmomente $M_1 = {}^1/_{10}\, p l^2$. Dann nimmt im Mittelfelde das negative Moment wieder ab, geht durch Null und erreicht in der Mitte einen Größtwerth, welcher sich ohne Weiteres zu $M_0 = {}^1/_8 p l^2 - M_1 = {}^1/_{40}\, p l^2$ ergiebt. Dann wiederholt sich Alles symmetrisch. Den Momenten-Nullpunkten entsprechen wiederum die Wendepunkte der Biegungslinie. Für die Neigungen derselben über den Stützen liefert Gl. 4, S. 80

$$E J \alpha_0 = {}^1/_{40}\, p l^3; \quad E J \alpha_1 = - {}^1/_{120}\, p l^3.$$

An den Mittelstützen treffen größtes Moment und größte Querkraft in ungünstiger Weise zusammen. Die verhältnismäßsig größten Momente sind sehr ungleich; sie verhalten sich wie $8:10:2{,}5$. Eine bessere Ausgleichung ist zu erreichen durch Verschiebung der beiden Mittelstützen nach außsen und nach unten; durch erstere wächst besonders M_0 unter Verminderung der beiden anderen Momente, und durch letztere wird der Auflagerdruck C vermindert, A vergrößsert und damit auch $M_{max} = \frac{A^2}{2p}$ vergrößsert unter gleichzeitiger Verkleinerung von M_1 und Vergrößserung von M_0. Durch diese beiden Stützenverschiebungen hat man es in der Hand, zwischen den Momenten jedes beliebige Verhältnis zu erreichen. Anwendung davon wird weiter unten bei Behandlung der Brückenträger auf 4 Stützen (S. 95) gemacht.

Beispiel: Träger auf sehr vielen Stützen. Ist die Zahl der Stützen in gleichen Höhen und Abständen sehr groß bei derselben Belastung mit p in den Feldern, so werden diejenigen Felder, welche weit von den Enden entfernt sind, sich nicht wesentlich von einander unterscheiden. Die Biegungslinie wird dann über den Stützen nahezu wagerecht sein und jedes Feld sich wie ein beiderseits wagerecht eingespannter Balken verhalten. Nach S. 45 sind dann die Stützenmomente $M_1 = {}^1/_{12}\, p l^2$, die Momente in den Mitten $M_0 = {}^1/_{24}\, p l^2$. Die Auflagerdrücke sind $C = pl$,

Sind die Felder abwechselnd unbelastet und mit p belastet (Fig. 84). so ist die Anordnung symmetrisch zur Mitte eines belasteten Feldes und ebenso eines unbelasteten Feldes. Die Stützenmomente M_1 sind daher überall gleich, u. zw. müssen sie halb so groß sein wie bei Belastung sämmtlicher Felder; denn bei voller Belastung ist die Anordnung auch zu einer beliebigen Stütze symmetrisch, es tragen daher zu dem Momente dieser Stützen die Belastungen zweier Felder, die symmetrisch zu einander liegen, gleichviel bei, und wenn man von je zwei solchen Feldern eins entlastet, so wird M_1 halb so groß. Demnach ist $M_1 = {}^1/_{24}\, p l^2$ und

Fig. 84.

$M_0 = {}^1/_8 pl^2 - {}^1/_{24} pl^2 = {}^1/_{12} pl^2$. Die Gröfse M_1 behält das Moment längs eines unbelasteten Feldes bei, und die Querkraft ist auf dieser Strecke Null. Die Auflagerdrücke sind aus dem gleichen Grunde, wie bezüglich der Stützenmomente erläutert, halb so grofs wie bei voller Belastung, d. h. $C = {}^1/_2 pl$. Für die Neigung der Biegungslinie über einer Stütze findet man leicht $EJ\alpha_1 = {}^1/_2 M_1 l$.

II. Brückenträger auf 3 Stützen mit gleichförmig vertheilter, beweglicher Belastung.

Es werde eine ständige (unbewegliche) gleichförmig vertheilte Last g f. d. Längeneinheit angenommen und aufserdem eine bewegliche, ebenfalls gleichförmig vertheilte Last p f. d. Längeneinheit, u. zw. soll einstweilen die bewegliche Belastung immer ganze Felder bedecken. Dann schwankt die Belastung jedes Brückenfeldes zwischen den Grenzen g und $g + p = q$, und es ist anfänglich noch unbestimmt, welchen dieser beiden Werthe sie haben muss, damit die ungünstigsten Fälle eintreten. Daher wird die Belastung der beiden Felder einstweilen p_1 und p_2 genannt und erst später näher festgestellt.

Die Felder mögen zunächst die verschiedenen Weiten l_1 u. l_2 haben; die Mittelstütze liege um c unter der Verbindungsgeraden der Endstützen (Fig. 85), dann ist

$$\beta_1 = {}^c/_{l_1}; \quad \beta_2 = - {}^c/_{l_2}.$$

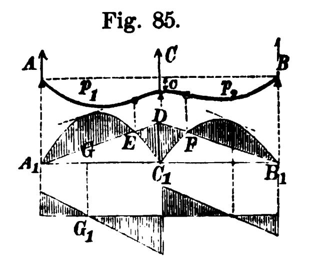
Zur Berechnung des einzigen unbekannten Stützenmomentes M_1 über die Mittelstütze setze man in Gl. III, S. 81 $n = 1$:

$$2 M_1 (l_1 + l_2) = {}^1/_4\, p_1 l_1^3 + {}^1/_4\, p_2 l_2^3 - 6\, EJc\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right).$$

Hieraus erhält man

$$1) \qquad M_1 = \frac{1}{8} \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{l_1 + l_2} - 3\, EJ \frac{c}{l_1 l_2}.$$

Fig. 85.



Der Stützendruck links wird nach Gl. IV a, S. 83:

$$A = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{M_1}{l_1},$$

oder, wenn man für M_1 den Werth einführt:

$$2) \qquad A = p_1 \frac{3 l_1^2 + 4 l_1 l_2}{8 (l_1 + l_2)} - p_2 \frac{l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)} + \frac{3 EJc}{l_1^2 l_2}.$$

Für das Folgende möge nun der einfachere Fall **gleicher** Feldlänge berücksichtigt werden, weil der Rechnungsgang für ungleiche Weiten derselbe sein würde.

Für $l_1 = l_2 = l$ wird aber

$$3)\qquad M_1 = \frac{l^2}{16}(p_1 + p_2) - \frac{3\,EJc}{l^2};$$

$$4)\qquad A = \frac{7}{16}p_1 l - \frac{1}{16}p_2 l + \frac{3\,EJc}{l^3}.$$

Für den rechtsseitigen Auflagerdruck gilt:

$$B = A + {}^1\!/_2\, p_2 l - {}^1\!/_2\, p_1 l \text{ oder}$$

$$5)\qquad B = \frac{7}{16}p_2 l - \frac{1}{16}p_1 l + \frac{3\,EJc}{l^3}$$

(von A nur durch Vertauschung von p_1 mit p_2 und umgekehrt verschieden), und für die Mitte:

$$6)\qquad C = \frac{5}{8}(p_1 + p_2)\,l - \frac{6\,EJc}{l^3}.$$

Die einfachen Momentenflächen sind Parabeln der Pfeilhöhen ${}^1\!/_8\, p_1 l^2$ und ${}^1\!/_8\, p_2 l^2$; man mache $C_1 D = M_1$ und erhält die schraffirte Momentenfläche. An beliebiger Schnittstelle des ersten Feldes ist

$$M_x = A\,x - {}^1\!/_2\, p_1 x^2,$$

welches für $x = \frac{A}{p_1}$ den gröfsten positiven Werth

$$7)\qquad M_{max} = \frac{A^2}{2\,p_1}$$

erreicht. Die Stelle G für dieses Moment liegt mitten zwischen den Momenten-Nullpunkten A_1 und E. Das gröfste negative Moment ist M_1. Für das rechtsseitige Feld gilt entsprechendes.

Die Querkraft im ersten Felde ist

$$Q_x = A - p_1 x,$$

dargestellt durch eine Gerade vom Gefällverhältnisse p_1. An der Mittelstütze ändert sich Q_x um C. Im zweiten Felde ist das Gefälle der Darstellung von Q_x gleich p_2. Die gröfsten positiven und negativen Querkräfte kommen an den Stützen vor. Ist der Träger mit seinen Lasten völlig gegeben, so sind hiernach M_x und Q_x und damit auch die Anstrengungen an allen Trägerpunkten bekannt. Von besonderer Wichtigkeit sind aber die gröfsten Zahlenwerthe, welche unter den Momenten und Querkräften bei ungünstigster Belastung vorkommen.

Das Stützenmoment M_1 wird nach Gl. 3, S. 88 von p_1 und p_2 in gleichem Sinne beeinflusst, wird daher am gröfsten, wenn $p_1 = p_2 = q$ wird, d. h. bei voller Belastung (Fig. 86), nämlich

$$M_1 = \frac{q\,l^2}{8} - \frac{3\,EJc}{l^2} = \frac{q\,l^2}{8}\left(1 - \frac{24\,EJc}{q\,l^4}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung

Fig. 86.



$$8)\qquad \frac{24\,EJc}{q\,l^4} = \psi, \quad \text{so entsteht}$$

$$9)\qquad M_1 = {}^1\!/_8\, q\,l^2\,(1 - \psi)\,.$$

Der Auflagerdruck A (Gl. 4) wird von p_1 positiv, von p_2 negativ beeinflusst, wird mithin am gröfsten für $p_1 = q$, $p_2 = g$ (Fig. 87), nämlich

$$A = \frac{7}{16}\,q\,l - \frac{1}{16}\,g\,l + \frac{3\,EJc}{l^3} = \frac{q\,l}{16}\left(7 - \frac{g}{q} + \frac{48\,EJc}{q\,l^4}\right)$$

oder

Fig. 87.

$$10)\qquad A = \frac{q\,l}{16}\left(7 - \frac{g}{q} + 2\,\psi\right).$$

Das gröfste positive Moment des ersten Feldes: $M_{max} = \dfrac{A^2}{2\,p_1}$ wächst mit A, wird daher auch bei der Belastung nach Fig. 87 am gröfsten.

Allerdings kommt p_1 bei M_{max} auch im Nenner vor, so dass eine Vergröfserung von p_1 nicht nur den Zähler, sondern auch den Nenner anwachsen lässt, doch ist der Einfluss der Vergröfserung des Zählers überwiegend, da A im Quadrate auftritt. Auch einfache Ueberlegung zeigt, dass das linke Feld stark belastet sein muss, damit in ihm ein grofses Moment entstehe. Schliefslich führt auch eine Differentiation nach p_1, sowie eine spätere Untersuchung (S. 103) zu diesem Ergebnisse.

Demnach wird

$$11)\qquad M_{max} = \frac{q\,l^2}{512}\left(7 - \frac{g}{q} + 2\,\psi\right)^2.$$

Die Querkraft unmittelbar links neben der Mittelstütze wird nach Fig. 85:

$$Q_1 = A - p_1\,l = -\frac{9}{16}\,p_1\,l - \frac{1}{16}\,p_2\,l + \frac{3\,EJc}{l^3}\,.$$

Der gröfste negative Werth entsteht also bei der Belastung nach Fig. 86, nämlich

$$12)\qquad -Q_1 = {}^1\!/_{16}\,q\,l\,(10 - 2\,\psi)\,.$$

Nimmt man nun zunächst an, die Stützen liegen in einer Geraden, es sei $c = 0$ und mithin auch $\psi = 0$, so wird nach Gl. 9 und 11

$$M_1 = {}^1/_8\, q\, l^2 = {}^{64}/_{512}\, q\, l^2 \quad \text{und}$$
$$M_{max} < {}^1/_{512}\, q\, l^2\, (7)^2 = {}^{49}/_{512}\, q\, l^2,$$

d. h. es ist das gröfste Stützenmoment M_1 erheblich gröfser als das gröfste positive Moment in den Feldern. Zugleich erkennt man aber aus den Gl. 9 u. 11, dass ein positives ψ, also eine positive Senkung c der Mittelstütze das Moment M_1 verkleinert unter gleichzeitiger Vergröfserung von M_{max}.

Für $\psi = 0$ wird nach Gl. 10 die gröfste Querkraft am Endauflager $A < {}^7/_{16}\, q\, l$, die Querkraft an der Mittelstütze (nach Gl. 12) $-Q_1 = {}^{10}/_{16}\, q\, l$. An der Mittelstütze kommt daher zu dem grofsen Momente M_1 noch die gröfste Querkraft $-Q_1$, was auf die Anstrengung bekanntlich ungünstig einwirkt. Aber auch bei den Querkräften wirkt eine Senkung der Mittelstütze günstig, indem dadurch $-Q_1$ vermindert wird unter gleichzeitiger Vergröfserung von A.

Für Träger mit voller Wand und überall gleichem Querschnitte, wie sie hier zunächst vorausgesetzt sind, ist eine Verminderung des gröfsten Momentes besonders vortheilhaft, und diese wird erreicht, wenn die Abnahme von M_1 und die gleichzeitige Zunahme von M_{max} zu einer völligen Ausgleichung beider führen; es würde in diesem Sinne

13) $$M_1 = M_{max}$$

eine zweckmäfsige Bedingung für die Höhenlage der Mittelstütze sein. Nach den Gl. 9 u. 11 müsste dann

$$1 - \psi = \frac{1}{64}\left(7 - \frac{g}{q} + 2\,\psi\right)^2$$

werden; das giebt, nach ψ aufgelöst:

14) $$\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{q} - 23 + \sqrt{544 - 32\,\frac{g}{q}}\right).$$

(Ein negatives Zeichen vor dem Wurzelausdrucke liefert eine nicht brauchbare Lösung.)

Wird der Träger nach dieser Bedingung angeordnet, so wird das an ihm vorkommende gröfste Moment nun $M_{max} = M_1 = {}^1/_8\, q\, l^2 (1 - \psi)$ sein. Hätte man aber die beiden Felder durch je einen einfachen Träger auf 2 Stützen überspannt, so wäre ${}^1/_8\, q\, l^2$

das maßgebende größte Moment. Die Verhältniszahl $1-\psi$ giebt also an, in welchem Maße durch Anwendung eines durchgehenden Trägers bei zweckmäßiger Senkung der Mittelstütze das größte Moment vermindert wird.

Für die entsprechende Senkung c erhält man einen durchsichtigeren Ausdruck, wenn in Gl. 8 statt der Belastung q die stärkste Spannung σ in der Außenkante des Trägers einführt. Es ist dann

$$\sigma \frac{J}{e} = \frac{1}{8} q l^2 (1-\psi) \quad \text{oder} \quad \frac{q l^2}{8J} = \frac{\sigma}{e(1-\psi)}.$$

Setzt man dies in Gl. 8 ein, so entsteht für die Senkung c:

$$15) \qquad \frac{c}{l} = \beta = \frac{\psi}{3(1-\psi)} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Nach Gl. 14 ist ψ nur von g/q abhängig. Dieses Verhältnis wächst mit zunehmender Spannweite l. Bei geringer Weite wird der erforderliche Trägerquerschnitt klein und daher auch g klein; wird l aber die größte noch ausführbare Spannweite, so wird g groß im Verhältnisse zu p und nähert sich daher dem Werthe $g+p=q$. Es kann sich daher g/q nur zwischen Null und Eins bewegen. Für einige Zwischenwerthe sind in folgender Tabelle die zugehörigen Werthe von $1-\psi$ und von $\frac{\psi}{3(1-\psi)}$ angegeben.

$\frac{g}{q}$	$1-\psi$	$\frac{\psi}{3(1-\psi)}$
0,0	0,838	0,064
0,1	0,823	0,072
0,2	0,807	0,080
0,3	0,792	0,088
0,4	0,776	0,096
0,5	0,761	0,105
0,6	0,746	0,113
0,7	0,731	0,123
0,8	0,716	0,132
0,9	0,701	0,142
1,0	0,686	0,151

Die zu erreichende Verminderung des gröſsten Momentes beträgt für $g/_q = 0$ (d. h. für sehr kleine Spannweite) 16,2 %, für $g/_q = 1$ (d. h. für sehr groſse Weite) 31,4 %.

Beispiel: Für einen Brückenträger auf 3 Stützen sei $l = 10^{\text{m}}$, die ständige Last $g = 2000^{\text{kg}}/_{\text{m}}$ (Kilogramm f. 1 Meter Trägerlänge), die bewegliche Last $p = 2000^{\text{kg}}/_{\text{m}}$, mithin $q = 4000$ und $g/_q = 0{,}5$. Soll der Träger (mit voller Wand) über beide Felder im Zusammenhange durchgehen, so ist (unter Voraussetzung überall gleichen Querschnitts) durch Senkung der Mittelstütze das gröſste Moment zufolge vorstehender Tabelle auf $0{,}761 \cdot {}^1/_8\, p l^2$, d. h. um 23,9 % gegenüber Einzelträgern) zu vermindern. Für diese Senkung gilt nach Gl. 15 und nach der Tabelle

$$\frac{c}{l} = \beta = 0{,}105 \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Nimmt man $\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{3000}$ und $\frac{l}{e} = 20$, so wird $\frac{c}{l} = \beta = \frac{1}{1429}$ und $c = 0{,}7^{\text{cm}}$.

Ohne Senkung der Mittelstütze, für $c = 0$, wäre das gröſste Moment am durchgehenden Träger ${}^1/_8\, q l^2$, ebenso groſs wie bei Einzelträgern. Es ist besonders zu beachten, dass diese geringfügige Senkung eine so erhebliche Einwirkung (23,9 %) auf das Moment ausübt.

Mag man nun die berechnete Senkung zur Anwendung bringen, oder aus irgend welchen Gründen vielleicht eine andere Höhenlage der Mittelstütze annehmen — jedenfalls sind die gröſsten vorkommenden Momente durch die Gleichungen 9 und 11, die gröſsten Querkräfte durch die Gl. 10 und 12 gegeben.

Will man für alle Querschnitte eine deutliche Uebersicht der gröſsten und kleinsten Momente und Querkräfte haben, so empfiehlt es sich, für 4 Belastungsarten, nämlich

1) $p_1 = p_2 = g$; 2) $p_1 = p_2 = q$; 3) $p_1 = q,\ p_2 = g$; 4) $p_1 = g,\ p_2 = q$

die Darstellungen von M_x und Q_x in der Weise der Fig. 85 zu zeichnen. Man nehme dazu beispielsweise $J = 285\,000^{\text{cm}^4}$ und $c = 0{,}7^{\text{cm}}$ an, so dass $\frac{3EJc}{l^3} = 1197^{\text{kg}}$ wird.

Das Vorkommen negativer Auflagerdrücke. Der Auflagerdruck $A = \frac{7}{16} p_1 l - \frac{1}{16} p_2 l + \frac{3EJc}{l^3}$ wird am kleinsten für $p_1 = g$ und $p_2 = q$, nämlich

$$A = \frac{ql}{16}\left(7\frac{g}{q} - 1\right) + \frac{3EJc}{l^3}.$$

Bei gleich hohen Stützen ($c = 0$) wird hiernach $A \leqq 0$ für $\frac{g}{q} \leqq \frac{1}{7}$.

Für $g/_q < \frac{1}{7}$ würde der Träger, wenn er in gewöhnlicher Weise aufgelagert ist, bei einseitiger Belastung des linken Feldes

sich von der Stütze abheben und bei weiterem Vorrücken der beweglichen Belastung nach links wieder auf die Stütze niederschlagen. Da solche Vorkommnisse auf die Dauer nicht zulässig sind, so müsste durch eine Verankerung der Enden des Trägers oder durch entsprechende Belastung derselben ein Abheben von den Stützen verhindert werden.

Eine Senkung der Mittelstütze vergrößert den Auflagerdruck A, erschwert daher das Abheben des Trägers von den Endstützen und ist also auch in dieser Beziehung günstig, während eine Hebung der Mittelstütze das Abheben erleichtern würde.

III. Einfluss einer Abweichung von der geplanten Höhenlage der Stützen. Ausführung der geplanten Höhenlage.

Die Verkleinerung des größten Momentes in Folge der Senkung der Mittelstütze betrug in dem Beispiele S. 92 fast 24 %. Für die Querschnitts-Berechnung des Trägers darf man diesen Umstand nur dann verwerthen, wenn die beabsichtigte Senkung hinreichend genau ausgeführt und dauernd erhalten werden kann. Wäre nämlich der Träger mit Rücksicht auf die Senkung der Mittelstütze um $c = 0{,}7^{\text{cm}}$ für ein größtes Moment gleich $0{,}761 \cdot {}^1/_8\, q\, l^2$ berechnet worden und hätte die Mittelstütze durch einen Fehler bei der Aufstellung oder durch nachträgliche Aenderung eine vielleicht gerade um $0{,}7^{\text{cm}}$ höhere Lage erhalten, als beabsichtigt war, so würde in Wirklichkeit für den Träger $c = 0$ und das größte Moment ${}^1/_8\, q\, l^2$ sein. Die stärkste Spannung wäre dann $1 : 0{,}761 = 1{,}31$ mal größer, als der Rechnung zu Grunde gelegt war.

Ein Fehler bei der Aufstellung des Trägers kann nun ebenso wohl in einer Unrichtigkeit der Höhenlage der Pfeiler-Oberfläche, wie in einer Ungenauigkeit der Form des Trägers bestehen.

Wir haben uns den Träger bisher als im spannungslosen (ungebogenen) Zustande völlig geradlinig gedacht. Wird ein solcher Balken auf 3 in derselben Geraden liegende Stützen gelagert, so ist für die Berechnung desselben $c = 0$ maßgebend; weicht aber die Träger-Unterkante um eine kleine Größe von der geraden Linie ab, so wird noch derselbe Spannungszustand ($c = 0$), wie oben erwähnt, stattfinden, wenn die Stütz-

punkte in genau entsprechender Weise von der Geraden abweichen, so dass wieder der spannungslose Träger genau auf die Stützen passt. Muss aber der Träger an der mittleren Auflagerstelle erst um c nach unten durchgebogen werden, damit er sämmtliche Stützen berühren könne, dann entspricht seine Auflagerung einer Senkung c der Mittelstütze. Hieraus folgt, dass zu einer genauen Aufstellung des Trägers ein sorgfältiges Abmessen der Stützenhöhen nicht genügt, wenn nicht aufserdem die gegenseitige Höhenlage der Auflagerstellen am Träger bei spannungslosem Zustande desselben bekannt ist.

Diese gegenseitige Lage der Auflagerstellen am spannungslosen Träger lässt sich leicht ermitteln, wenn man den Träger auf einer Bühne flach niedergelegt hat (so dass die Ebene seiner Wand nahezu wagerecht liegt). An aufrecht stehenden Trägern ist dies nicht unmittelbar möglich.

Sind diese Messungen an den Pfeilern und am Träger ausgeführt, so kann man leicht erkennen, in welchem Mafse eine der Stützen nöthigenfalls der Höhe nach verändert werden muss, damit der spannungslose Träger in dem Abstande c über der Mittelstütze liegt. Dabei ist besonders zu betonen, dass eine Aufstellung für gleiche Höhenlage der Stützen ($c = 0$) keineswegs einfacher ist als eine solche mit einer bestimmten Senkung c. Die Umständlichkeit der Aufstellung liegt nicht in einer beabsichtigten Abweichung von der gleichen Höhenlage, sondern in dem Wesen des durchgehenden, statisch unbestimmten Trägers überhaupt.

Zur richtigen Aufstellung kann statt der besprochenen Messungen auch die Abwägung eines Auflagerdruckes A an dem vorläufig aufgestellten Träger dienen. Kennt man in diesem Zustande sein Gewicht g f. d. Längeneinheit (mit Einrechnung der an ihm befindlichen Bautheile), so ist der Auflagerdruck $A = \frac{3}{8} g l + \frac{3 E J c}{l^3}$; sind also g, l, E und J bekannt, so besteht eine einfache Beziehung zwischen A und c. Ermittelt man den Druck A, welchen der Träger am Ende ausübt, mittels einer Hebelwaage oder einer Wasserdruck-Presse, so geht daraus c hervor. Leicht kann dann das Auflager A so weit gehoben oder gesenkt werden, bis der dem beabsichtigten Werthe der

Senkung c entsprechende Auflagerdruck A durch die Wäge-Vorrichtung nachgewiesen ist.*)

Nachträgliche Veränderungen durch ungleichmäſsige Senkung der Pfeiler oder durch ungleichmäſsige Temperatur-Aenderung bringen natürlich neue Störungen hervor, die ohne sorgfältige Prüfung nicht bemerkt werden. Daher empfiehlt es sich, bei der Berechnung eine Abweichung $\pm \Delta c$ von der beabsichtigten Höhenlage der Stützen zu berücksichten. Die Gröſse Δc richtet sich natürlich nach äuſseren Umständen; vorläufig könnte vielleicht $\Delta c \geqq 0{,}5^{cm}$ und $\Delta c \geqq {}^1/_{2000}\, l$ gewählt werden. In dem Beispiele wäre demnach $\Delta c = 0{,}5^{cm}$ zu nehmen, und statt der beabsichtigten Senkung $c = 0{,}7^{cm}$ wären die Grenzwerthe $c = 0{,}2^{cm}$ und $c = 1{,}2^{cm}$ der Berechnung der gröſsten Momente und Querkräfte zu Grunde zu legen; dadurch ist man in gewissem Grade gegen Zufälligkeiten gesichert. Gleichwohl soll man sich bei der Aufstellung bemühen, den mittleren Zustand des berechneten c zu erreichen.

IV. Brückenträger auf 4 Stützen.

Auf S. 86 wurde schon bemerkt, dass bei einem Träger auf 4 Stützen durch eine Senkung der Mittelstützen und durch Erweiterung des Mittelfeldes ein günstiger Einfluss auf die gröſsten Momente ausgeübt werden könne. Daher sollen bei dem jetzt zu untersuchenden Brückenträger ungleiche Feldweiten und ungleiche Höhenlage der Stützen angenommen werden; jedoch sei die Anordnung der Stützen symmetrisch zur senkrechten Mittellinie.

Es sei

l_1 die Weite der Seitenfelder,
l_2 die Weite des Mittelfeldes,
$v = \frac{l_2}{l_1}$ das Verhältnis beider,
c die Senkung beider Mittelstützen,
$p_1,\ p_2,\ p_3,$ die gleichförmigen Belastungen der 3 Felder;

dann wird

$$\beta_1 = \frac{c}{l_1};\quad \beta_2 = 0;\quad \beta_3 = -\frac{c}{l_1},$$

*) Ein weiteres Verfahren der Aufstellung ist von Marloh im Centralblatte der Bauverwaltung 1891, S. 163 angegeben.

und Gl. III, S. 81 liefert für $n=1$ bezw. $n=2$:

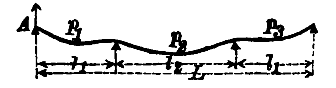
$$2\,M_1(l_1+l_2)+M_2\,l_2=\frac{p_1\,l_1^3}{4}+\frac{p_2\,l_2^3}{4}-\frac{6\,EJc}{l_1};$$

$$M_1\,l_2+2\,M_2(l_2+l_1)=\frac{p_2\,l_2^3}{4}+\frac{p_3\,l_1^3}{4}-\frac{6\,EJc}{l_1}.$$

Werden nun l_1 und l_2 durch die ganze Trägerlänge L und durch v ausgedrückt, indem man $2\,l_1+l_2=l_1(2+v)=L$, mithin

$$l_1=\frac{L}{2+v},\quad l_2=\frac{v}{2+v}L$$

Fig. 88.



setzt, so liefert die Auflösung der beiden obigen Gleichungen die Stützenmomente:

$$1)\quad M_1=\frac{L^2}{4}\,\frac{p_1(2+2v)+p_2v^3(2+v)-p_3v}{(2+v)^3(2+3v)}-6\,\frac{EJc}{L^2}\,\frac{(2+v)^2}{2+3v};$$

$$2)\quad M_2=\frac{L^2}{4}\,\frac{p_3(2+2v)+p_2v^3(2+v)-p_1v}{(2+v)^3(2+3v)}-6\,\frac{EJc}{L^2}\,\frac{(2+v)^2}{2+3v}.$$

(M_1 und M_2 unterscheiden sich, wie zu erwarten war, nur durch Vertauschung von p_1 und p_3).

Weil nun der linksseitige Auflagerdruck

$$A=\frac{p_1\,l_1}{2}-\frac{M_1}{l_1}=\frac{p_1}{2}\,\frac{L}{2+v}-\frac{M_1}{L}(2+v),$$

so wird nach Einführung des Werthes von M_1 aus Gl. 1 und nach gehöriger Ordnung:

$$3)\quad A=\frac{L}{4}\,\frac{p_1(6+14v+6v^2)-p_2v^3(2+v)+p_3v}{(2+v)^2(2+3v)}+\frac{6\,EJc}{l^3}\,\frac{(2+v)^3}{2+3v}.$$

Es wird nun wie bei einem Träger auf 3 Stützen (nach Gl. 7, S. 88) das gröfste positive Moment im linksseitigen Felde $M_{max}=\dfrac{A^2}{2\,p_1}$, mithin vorwiegend durch A beeinflusst. A wird aber nach Gl. 3 möglichst grofs, wenn $p_1=p_3=q$, $p_2=g$ (Fig. 89); diese Belastungsart ist daher für M_{max} mafsgebend.

Fig. 89.

M_{max}

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$\frac{24\,EJc}{q\,l_1^4}\quad\text{oder}\quad\frac{24\,EJc}{q\,L^4}(2+v)^4=\psi,$$

so entsteht nach geeigneter Zusammenziehung

$$5)\qquad M_{max} = \frac{q L^2}{32}\left(\frac{3 + 6v - \frac{g}{q}v^3 + \psi}{(2+v)(2+3v)}\right)^2.$$

Das Stützenmoment M_1 wird nach Gl. 1 am gröfsten für $p_1 = p_2 = q$, $p_3 = g$ (Fig. 90), und man erhält dadurch

Fig. 90.

$$6)\quad M_1 = \frac{q L^2}{4} = \frac{2 + 2v + 2v^3 + v^4 - \frac{g}{q}v - (2+v)\psi}{(2+v)^3(2+3v)}.$$

Damit die positiven Momente innerhalb des Mittelfeldes möglichst grofs werden, muss zunächst das Mittelfeld selbst voll, d. h. mit q, belastet sein; jede Belastung der Seitenfelder aber würde auf jene Momente in ähnlicher Weise einwirken, wie bei einem beiderseitig eingespannten Balken eine Verstärkung der Einspannungs-Momente, also vermindernd; die Seitenfelder dürfen daher nur mit g belastet werden (Fig. 91). Da nun die Anordnung wieder ganz symmetrisch ist, so werden die Stützenmomente einander gleich; das gröfste Moment des Mittelfeldes liegt in der Mitte und wird

Fig. 91.

$$M_0 = {}^1/_8\, q l_2^2 - M_1.$$

Der hier einzuführende Werth M_1 ist aus Gl. 1 zu entnehmen, indem man dort $p_1 = p_3 = g$, $p_2 = q$ setzt. Dann entsteht nach möglichster Zusammenziehung

$$7)\qquad M_0 = \frac{q L^2}{8}\,\frac{(2+v)v^2 - 2\frac{g}{q} + 2\psi}{(2+v)^2(2+3v)}.$$

Wäre etwa die Eintheilung der ganzen Weite L durch örtliche Umstände gegeben, und sollte vielleicht aus irgend welchen Gründen eine Senkung der Mittelstützen unterbleiben, so würden die Momente M_{max}, M_1 u. M_0 nach der Gl. 5—7 völlig bestimmt sein, und das gröfste derselben wäre dann für die Anordnung des Gurtungs-Querschnittes mafsgebend. Da ferner in Gl. 1 u. 2 die Stützenmomente für beliebige Belastungsarten berechnet sind, und da mit Hülfe dieser Stützenmomente jedes Moment und jede Querkraft leicht ermittelt werden können, so sind auch für die 3 wichtigsten Belastungsarten (den Fig. 89—91 entsprechend)

die Werthe M_x und Q_x für jedes Trägerfeld mit Hülfe von Parabeln und geraden Linien leicht zu zeichnen, woraus sich dann durch Zusammentragen in je eine Figur die überhaupt gröfsten Werthe für jeden Schnitt ergeben. Hiermit würde dann auch die gröfste Anstrengung in jedem Trägerpunkte bestimmt sein.

Hat man aber freie Verfügung über die Lage der Mittelstützen und will man das gröfste am Träger vorkommende Moment möglichst vermindern, so sind die von der Senkung c der Mittelstützen und von dem Verhältnisse der Feldweiten unmittelbar abhängigen Werthe

$$\psi = \frac{24\, E J c}{q\, l_1^4} \quad \text{bezw.} \quad v = \frac{l_2}{l_1}$$

so zu bestimmen, dass

$$M_1 = M_0 \quad \text{und zugleich} \quad M_0 = M_{max} \quad \text{werde.}$$

Die erste Bedingung liefert nach Gl. 6 u. 7, für ψ aufgelöst:

$$8) \qquad \psi = \frac{4 + 4\,v - 4\,v^2 + v^4 + 4\,\frac{g}{q}}{4\,(2 + v)},$$

während die zweite Bedingung auf die Gl. führt:

$$9) \quad \left(3 + 6\,v - \frac{g}{q}\,v^3 + \psi\right)^2 = 4\,(2 + 3\,v)\left(2\,v^2 + v^3 - 2\,\frac{g}{q} + 2\,\psi\right).$$

Setzt man den Werth von ψ aus Gl. 8 in Gl. 9 ein, so entsteht eine Gleichung, die in Bezug auf die Unbekannte v vom achten Grade ist, demnach nur für reine Zahlen-Koëfficienten aufgelöst werden kann. Man erhält solche, indem man für $g/_q$ der Reihe nach bestimmte Zahlenwerthe zwischen 0 und 1 annimmt und in jedem Falle denjenigen reellen, positiven, etwas über der Einheit liegenden Werth von v sucht, welche der Gleichung achten Grades genügt.

Dadurch ergeben sich für verschiedene Werthe von $g/_q$ die Verhältniszahlen v der nachstehenden Tabelle*); diese liefern, in Gl. 8 eingesetzt, die entsprechenden Werthe für ψ und damit auch zugleich das gröfste Moment $M_{max} = M_1 = M_0$ nach Gl. 7. Letzteres wird, des Vergleiches wegen, im Verhältnisse zu $^1/_8\, q\,(^1/_3\, L)^2$ dargestellt, weil dieser Werth bei Anwendung ein-

*) Siehe Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen; Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins für das Königreich Hannover 1860, S. 416.

facher Träger das gröfste Moment gebildet haben würde, so dass jene Verhältniszahlen die erreichbare Verminderung des gröfsten Momentes in Folge der Anwendung durchgehender Träger (gegenüber Einzelträgern) angeben.

$\frac{g}{q}$	$\frac{l_2}{l_1} = v$	ψ	$\frac{M_{max}}{1/72\, q\, L^2}$
0,0	1,13	0,4	0,82
0,2	1,14	0,47	0,78
0,4	1,15	0,53	0,74
0,6	1,16	0,59	0,69
0,8	1,165	0,65	0,65
1,0	1,17	0,72	0,61

Die einzelnen Spalten der Tabelle ändern sich so gleichmäfsig mit g/q, dass man mit genügender Genauigkeit jene Werthe in einfache Annäherungs-Formeln kleiden kann; dabei kann man statt ψ gleich c ausdrücken und erhält

10) $$v = 1{,}13 + 0{,}04\, g/q\,;$$

11) $$M_{max} = 1/72\, q\, L^2 \left(0{,}82 - 0{,}21\, g/q\right);$$

12) $$c = \frac{q\, l_1^4}{60\, E\, J}\left(1 + 0{,}8\, \frac{g}{q}\right).$$

Beispiel: Im Anschluss an das Beispiel auf S. 92 werde hier $L = 3 \cdot 10 = 30^{m}$ und wiederum $g/q = 0{,}5$ vorausgesetzt.

Dann ergiebt Gl. 10: $v = 1{,}15$, so dass $l_1 = \frac{L}{2 + v} = \frac{30}{3{,}15} = 9{,}52^{m}$, daher $l_2 = 10{,}96^{m}$ wird.

Gl. 11 bestimmt als gröfstes Moment $M_{max} = M_1 = M_0 = 0{,}715 \cdot 1/72\, q\, L^2$ entsprechend eine Herabminderung um 28,5 % gegenüber Einzelträgern.

Zur bequemeren Berechnung der hierzu erforderlichen Senkung c führe man wieder die stärkste Spannung σ ein, dann ist $0{,}715 \cdot \frac{q\, L^2}{72} = \sigma\, \frac{J}{e}$, also $\frac{q}{J} = \frac{72}{0{,}715}\, \frac{\sigma}{e\, L^2}$; vertauscht man sodann in Gl. 12 noch l_1 mit $\frac{L}{3{,}15}$, so entsteht $\frac{c}{L} = 0{,}021\, \frac{\sigma}{E}\, \frac{L}{e}$, oder für $\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{3000}$, $\frac{L}{e} = 60$:

$$\frac{c}{L} = \frac{1}{2380} \quad \text{und} \quad c = 1{,}26^{cm}.$$

Was bezüglich der Träger auf 3 Stützen über den Einfluss einer unrichtigen Höhenlage und über die Aufstellung (S. 93—95) gesagt wurde, gilt im Wesentlichen auch für Träger auf mehr als 3 Stützen.

V. Einfluss einer nur theilweisen Belastung der Trägerfelder bei einem Träger auf 3 Stützen. Einflusslinien.

Bei den vorstehenden Entwickelungen wurde die bewegliche Last p immer über ganze Trägerfelder vorgeschoben. Es bleibt noch zu untersuchen, ob Moment und Querkraft an beliebiger Stelle bei einer nur theilweisen Belastung der Felder nicht etwa gröfser werden. Zur Entscheidung dieser Frage dient am besten die Einflusslinie. Da der Einfluss einer verschiedenen Höhenlage der Stützen sich immer durch ein besonderes, von der Belastungsart ganz unabhängiges Glied darstellt, so braucht bei der Aufsuchung der ungünstigsten Belastung eine verschiedene Höhenlage der Stützen nicht angenommen zu werden.

Einflusslinie für das Stützenmoment M_1. Bei der in Fig. 92 dargestellten Belastungsart ist der rechtsseitige, abwärts gerichtete Auflagerdruck (nach S. 91, Gl. 2):

Fig. 92.

$$B = \frac{P}{4}\left(\frac{u}{l} - \frac{u^3}{l^3}\right),$$

daher das Stützenmoment

$$M_1 = Bl = \frac{Pl}{4}\left(\frac{u}{l} - \frac{u^3}{l^3}\right) = Pl\,\frac{u(l-u)}{4\,l^2}\,\frac{l+u}{l}.$$

Es empfiehlt sich wegen der weiteren Anwendungen, nicht für M_1 selbst, sondern für $^1/_l\,M_1$ die Einflusslinie zu zeichnen. Lassen wir daher $P = 1$ werden, so entsteht

$$1)\qquad \frac{M_1}{l} = \frac{1}{4\,l}\left(u - \frac{u^3}{l^2}\right) = \frac{u(l-u)}{4\,l^2}\,\frac{l+u}{l}.$$

Die Darstellung dieses Werthes kann leicht konstruirt werden, denn der erste Faktor $\frac{u(l-u)}{4\,l^2}$ bedeutet bei veränderlichem u eine Parabel von der Spannweite l und der Pfeilhöhe $^1/_{16}$. Die Ordinaten dieser Parabel müssen dann noch in dem Verhältnisse $(l+u):l$ vergröfsert werden, um die Ordinaten der Einflusslinie von $M_1 : l$ darzustellen. Zu dem Ende projicirt man die Parabel-Ordinate wagerecht nach $A_1 E$, trägt links von A_1 eine Strecke $A_1 L = l$ ab und zieht durch L u. E eine Gerade,

deren Verlängerung auf der Richtung der ursprünglichen Parabel-Ordinate das Stück $HJ = M_1 : l$ bestimmt.

Die Einflusslinie für $M_1 : l$ hat noch folgende kennzeichnende Eigenschaften: Nennt man ihre Ordinate y, so wird $y = \frac{1}{4l}\left(u - \frac{u^3}{l^2}\right)$ und $\frac{dy}{du} = \frac{1}{4l}\left(1 - 3\frac{u^2}{l^2}\right)$. Für $u = 0$ ist $\frac{dy}{du} = \frac{1}{4l} = \frac{1}{4} : l$, für $u = l$ ist $\frac{dy}{du} = -\frac{1}{2l} = -\frac{1}{2} : l$. Die Tangenten an die Endpunkte der Kurve schneiden daher auf den Auflager-Senkrechten die Stücke $^1/_4$ bezw. $^1/_2$ ab. Für $u = l : \sqrt{3} = 0{,}577\,l$ wird $\frac{dy}{du} = 0$, mithin $y_{max} = \frac{1}{6\sqrt{3}} = 0{,}0962$.

Die so erhaltene Figur nennt man die M_1-Fläche mit dem Multiplikator $\mu = l$, d. h. die Ordinaten der Figur geben, mit l multiplicirt, den Einfluss einer Last Eins auf das Moment M_1. $M_1 : l$ bedeutet eine Kraft; als Einheit für die Ordinaten y ist daher irgend eine (von l unabhängige) Lasteinheit zu wählen.

Auf die statisch unbestimmte Gröfse M_1 wird alles Fernere zurückgeführt. Weil die Einflusslinie für M_1 aber eine Kurve ist, so soll die Einrichtung so getroffen werden, dass weitere krumme Linien nicht mehr nöthig sind, vielmehr diese eine zur Beantwortung aller weiteren Fragen zu verwenden ist.

Einflussfläche für M_x. Gegenüber einem einfachen Träger von der Spannweite $AC = l$ bringt das Stützenmoment M_1 eine Verminderung des Auflagerdruckes A um $M_1 : l$ daher eine Verminderung des Biegungsmomentes M_x an beliebiger Stelle um $\frac{M_1}{l} x$ hervor (nach Gl. IV a, S. 83). Ist also das „einfache Moment" M'_x, so wird das wirkliche Moment

$$M_x = M'_x - \frac{M_1}{l} x.$$

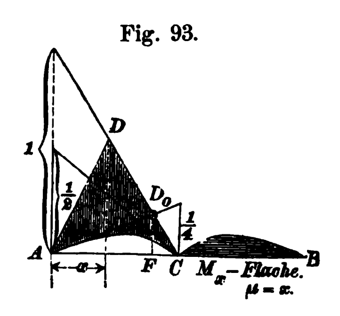
Um nun $M_1 : l$ unmittelbar benutzen zu können, muss man x als Multiplikator absondern und erhält

$$M_x = x\left(\frac{M'_x}{x} - \frac{M_1}{l}\right). \tag{2}$$

Die Einflusslinie für das einfache Moment M'_x ist (nach Fig. 74, S. 72) ein Dreieck, zu dessen Auftragung die Strecke x (gleich der Abscisse der Schnittstelle) auf der linksseitigen Auf-

lagersenkrechten abgeschnitten wird. Um nun $M'_x : x$ zu erhalten, wie jetzt nöthig ist, braucht man nur statt der Strecke x die Lasteinheit aufzutragen und im Uebrigen nach Fig. 74 zu verfahren. Um nun nach Gl. 2 den Werth $M_1 : l$ leicht abziehen zu können, trägt man die Einflusslinie für $M'_x : x$ nach derselben Seite mit der M_1-Linie auf; der Unterschied der Ordinaten stellt dann, mit dem Multiplicator x vervielfacht, die Einflussfläche für M_x dar (Fig. 93). Denkt man sich im Felde CB auch einen einfachen Träger, so hat eine Belastung desselben auf das einfache Moment M'_x des linksseitigen Trägers keinen Einfluss.

Fig. 93.



Zieht man von dem Einflusse $= 0$ den Werth $M_1 : l$ ab, so entsteht $M_x = x\left(-\frac{M_1}{l}\right)$; die Einflussfläche für M_x wird daher im rechtsseitigen Felde einfach durch die M_1-Linie begrenzt, deren Ordinaten negativ zu nehmen sind. Positive Einflussflächen sind in Fig. 93 senkrecht schraffirt, negative wagerecht; darnach ist unter den Verhältnissen der Figur im linken Felde durchweg positiver Einfluss. Wird aber x gröfser, nähert sich die Schnittstelle mehr der Mittelstütze, so rückt der Punkt D, auf derselben Geraden DC bleibend, nach C hin, und AD dreht sich, flacher werdend um A, während die Figur im Uebrigen unverändert bleibt. Bei einer bestimmten Lage F des Schnittes wird dann AD in der Lage AD_0 die Kurve AC im Punkte A berühren und bei noch weiter gehender Verschiebung des Schnittes die Kurve AC schneiden, wodurch die Einflussverhältnisse geändert werden.

Fig. 94.

Ist für die Grenzlage F des Schnittes $AF = x_0$, so ist nach der Figur

$$D_0 F = \frac{1}{4}\frac{x_0}{l} = \frac{l - x_0}{l} \quad \text{oder}$$

3) $$x_0 = {}^4/_5\, l.$$

Diese Stelle F in der Mittellinie des Trägers heifst **Festpunkt**.

Für eine Lage des Schnittes zwischen dem Festpunkte und der Mittelstütze (Fig. 94) wird die Kurve

AC von der Geraden AD in G geschnitten. Hat G die Koordinaten u_0 und y_0, so wird nach der Fig. 94 und nach Gl. 1:

$$y_0 = \frac{1}{l}(l-x)\cdot\frac{1}{x}u_0 = \frac{1}{4l}\left(u_0 - \frac{u_0^3}{l^2}\right);$$

daraus ergiebt sich

$$\frac{u_0}{l} = \sqrt{5-4\frac{l}{x}}. \tag{4}$$

Jetzt sind von $u=0$ bis $u=u_0$ die Einflüsse negativ, von $u=u_0$ bis $u=l$ positiv, längs des rechten Feldes wieder negativ.

Auf Grund der Einflussfiguren lassen sich nun die ungünstigsten Belastungsarten und die äufsersten Werthe der Momente selbst bestimmen.

Für einen Schnitt links vom Festpunkte F ist die Einflussfläche (Fig. 93) im linken Felde positiv, im rechten negativ. Bei stetiger beweglicher Last p muss daher (abgesehen von der stets vorhandenen ständigen Last g) nur das linksseitige Feld, u. zw. auf seine ganze Länge, mit p belastet sein, wenn M_x seinen gröfsten Werth $M_{x\,max}$ erhalten soll, während für $M_{x\,min}$ das Gegentheil gilt. Im ersten Falle ist

$$A = {}^3/_8\,gl + {}^7/_{16}\,pl, \quad \text{daher}$$

$$M_{x\,max} = {}^3/_8\,glx - {}^1/_2\,gx^2 + {}^7/_{16}\,plx - {}^1/_2\,px^2, \tag{5}$$

oder, wenn man $p = q - g$ setzt:

$$M_{x\,max} = {}^7/_{16}\,qlx - {}^1/_2\,qx^2 - {}^1/_{16}\,glx. \tag{5a}$$

Im anderen Falle ist

$$A = {}^3/_8\,gl - {}^1/_{16}\,pl, \quad \text{daher}$$

$$\left\{\begin{aligned} M_{x\,min} &= {}^3/_8\,glx - {}^1/_2\,gx^2 - {}^1/_{16}\,plx \\ &= {}^7/_{16}\,glx - {}^1/_2\,gx^2 - {}^1/_{16}\,qlx. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Diese Gleichungen gelten von $x=0$ bis $x={}^4/_5\,l$.

Für einen Schnitt zwischen dem Festpunkte F und der Mittelstütze C muss nur die Strecke von G bis C (Fig. 94), d. h. von $u=u_0$ bis $u=l$ mit p belastet sein, damit $M_{x\,max}$ entstehe. Der Beitrag dieser Belastung zu $M_{x\,max}$ wird bekanntlich (nach S. 74) erhalten, indem man die positive Einflussfläche GDC mit p multiplicirt; jedoch muss auch noch der Multiplicator $\mu = x$ als Faktor beigefügt werden.

Für eine Abscisse u zwischen u_0 und x berechnet sich die Einfluss-Ordinate η (als Unterschied der Ordinate der Geraden AD und der Kurve):

$$\eta = \frac{1}{l}(l-x) \cdot \frac{1}{x} \cdot u - \frac{1}{4l}\left(u - \frac{u^3}{l^2}\right) = \frac{u}{x} - \frac{5}{4}\frac{u}{l} + \frac{1}{4}\frac{u^3}{l^3}.$$

Ebenso wird rechts vom Schnitte

$$\eta_1 = \frac{1}{l}(l-u) - \frac{1}{4l}\left(u - \frac{u^3}{l^2}\right) = 1 - \frac{5}{4}\frac{u}{l} + \frac{1}{4}\frac{u^3}{l^3}.$$

Daher ist

$$M_{x\,max} = p\,x\int_{u_0}^{x}\left(\frac{u}{x} - \frac{5}{4}\frac{u}{l} + \frac{1}{4}\frac{u^3}{l^3}\right)du + px\int_{x}^{l}\left(1 - \frac{5}{4}\frac{u}{l} + \frac{1}{4}\frac{u^3}{l^3}\right)du$$

$$= px\left\{\int_{u_0}^{x}\frac{u}{x}\,du + \int_{x}^{l}du + \int_{u_0}^{l}\left(-\frac{5}{4}\frac{u}{l} + \frac{1}{4}\frac{u^3}{l^3}\right)du\right\}.$$

Dies giebt wegen $u_0^2 = l^2\,(5 - 4\,{}^{l}/_{x})$:

$$M_{x\,max} = \frac{p\,l^2}{2}\left(-5 + 4\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} + \frac{2\,l}{x}\right).$$

$M_{x\,min}$ kann hieraus berechnet werden; denn da die Belastung für $M_{x\,min}$ diejenige für $M_{x\,max}$ zu voller Belastung ergänzt; so muss

$$M_{x\,min} + M_{x\,max} = {}^3/_8\,p\,l\,x - {}^1/_2\,p\,x^2 \text{ sein, folglich}$$

$$M_{x\,min} = -\frac{pl^2}{2}\left(-5 + \frac{13}{4}\frac{x}{l} + \frac{2\,l}{x}\right).$$

Fügt man noch den Beitrag der ständigen Belastung hinzu, so wird schliefslich

$$7)\qquad M_{x\,max} = \frac{3}{8}g\,l\,x - \frac{1}{2}gx^2 + \frac{p\,l^2}{2}\left(-5 + 4\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} + \frac{2l}{x}\right)$$

$$8)\qquad M_{x\,min} = \frac{3}{8}g\,l\,x - \frac{1}{2}gx^2 - \frac{p\,l^2}{2}\left(-5 + \frac{13}{4}\frac{x}{l} + \frac{2l}{x}\right).$$

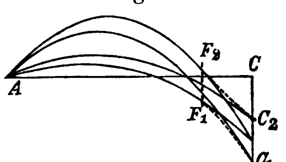
Für $x = l$ wird nach Figur 94 die positive Einflussfläche zu Null; $M_{x\,max}$ verlangt daher für diese Stelle völliges Fehlen der Last p, $M_{x\,min}$ also volle Belastung mit p. Dies sind wieder 2 Belastungsarten, bei denen p nur ganze Felder frei lässt bezw. bedeckt, die daher in der früheren einfachen Berechnungsart schon enthalten waren. Die genauere Berechnung giebt daher nur zwischen $x = 0{,}8\,l$ und $x = l$ Abweichungen gegen die frühere.

Beispielsweise wird für $x = 0{,}9\,l$:

$$M_{x\,max} = -0{,}0675\,g\,l^2 + 0{,}00611\,p\,l^2 \text{ gegen}$$
$$-0{,}0675\,g\,l^2 + 0 \cdot p\,l^2 \text{ nach dem Früheren,}$$
$$M_{x\,min} = -0{,}0675\,g\,l^2 - 0{,}07361\,p\,l^2 \text{ gegen}$$
$$-0{,}0675\,g\,l^2 - 0{,}0675\,p\,l^2\,.$$

Sind diese Abweichungen auch nicht unbedeutend, so haben sie doch für die Beurtheilung der Anstrengung des Trägers nur geringe Wichtigkeit, weil an der Mittelstütze, also ziemlich dicht daneben, das dem Zahlenwerthe noch viel bedeutendere Moment $-{}^1/_8\,(g+p)\,l^2$ vorkommt.

Fig. 95.



In der Darstellung der Momente giebt sich die Abweichung in folgender Weise zu erkennen: Hat man für die vier verschiedenen Belastungsarten, die auf S. 92 genannt wurden, die Momente aufgetragen (Fig. 95), so zeigen die obere und untere Begrenzung rechts von der Festpunkt-Senkrechten $F_1\,F_2$ Knicke in Folge Durchschneidens der Linien. Diese Knicke runden sich nun nach den genaueren Gleichungen 7 und 8 durch Kurven aus, die sich bei F_1 und C_1 bezw. bei F_2 und C_2 tangential an die vorhandenen Linien anschmiegen, wie durch gestrichelte Linien angedeutet ist. Es empfiehlt sich aber, statt dieser schwach gekrümmten Kurvenstücke einfach g e r a d e Linien $F_1\,C_1$ und $F_2 C_2$ zu ziehen, welche die Verhältnisse noch ein wenig ungünstiger darstellen, als sie wirklich sind. Auf diese Weise kommt man mit den früheren Rechnungen aus und bedarf der Gleichungen 7 und 8 gar nicht.*) Man zeichne also die Momenten-Parabel $A F_1$ für den Zustand $p_1 = g$, $p_2 = q$ und die Parabel $A F_2$ für den Zustand $p_1 = q$, $p_2 = g$, trage das Stützenmoment $M_1 = C C_1$ für den Zustand $p_1 = p_2 = q$, sowie das Stützenmoment $M_1 = C C_2$ für den Zustand $p_1 = p_2 = g$ auf und ziehe endlich die Geraden $F_1\,C_1$ und $F_2\,C_2$, so hat man mit genügender Genauigkeit die gröfsten und kleinsten Momente M_x; die sonstigen Linien in Fig. 95 sind dann überflüssig.

Einflussfläche für die Querkraft Q_x. Nach Gl. 2, S. 101 war $M_x = M_x' - \frac{M_1}{l}\,x$. Da nun allgemein die Querkraft $Q_x = \frac{dM}{dx}$, so wird

$$Q_x = Q_x' - \frac{M_1}{l}\,,$$

---

*) Vgl. W e y r a u c h, zur Vereinfachung der Berechnung durchgehender Träger; Zeitschrift des Arch. u. Ing.-Vereins zu Hannover 1890, S. 202—206.

worin Q'_x die „einfache Querkraft". Hiernach hat man von den Einfluss-Ordinaten für Q'_x (s. Fig. 76, S. 75) nur die Ordinaten der Fläche $M_1 : l$ abzuziehen und erhält in Fig. 96 die Einflussfläche für Q_x.

Fig. 96.

Um $Q_{x\,max}$ zu erhalten, muss man die Strecke vom Schnitte bis zur Mitte belasten. Eine zwischenliegende Einflussordinate hat die Gröfse

$$\eta = \frac{1}{l}(l-u) - \frac{1}{4l}\left(u - \frac{u^3}{l^2}\right)$$
$$= 1 - \frac{5}{4}\frac{u}{l} + \frac{u^3}{4l^3},$$

und es wird

$$Q_{x\,max} = p\int_x^l \left(1 - \frac{5}{4}\frac{u}{l} + \frac{u^3}{4l^3}\right)du$$
$$= \frac{pl}{4}\left(\frac{7}{4} - 4\frac{x}{l} + \frac{5}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right).$$

Bei Belastung beider Felder mit p wird $Q_x = {}^3\!/_8\, p\,l - p\,x$; diesen Werth muss $Q_{x\,min} + Q_{x\,max}$ haben, so dass sich

$$Q_{x\,min} = -\frac{pl}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right) \quad \text{ergiebt.}$$

Bei gleichzeitiger Berücksichtigung der ständigen Last g wird dann

$$9) \quad Q_{x\,max} = g\left(\frac{3}{8}l - x\right) + \frac{pl}{4}\left(\frac{7}{4} - \frac{4x}{l} + \frac{5}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right)$$

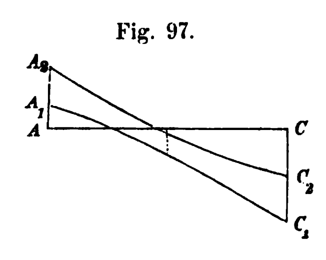
$$10) \quad Q_{x\,min} = g\left(\frac{3}{8}l - x\right) - \frac{pl}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right).$$

Die überhaupt vorkommenden gröfsten Querkräfte an den Stützen ergeben sich nach dieser Rechnung genau so wie bei der früheren Rechnungsweise; es wird nämlich

$$\text{für } x = o: Q_{x\,max} = {}^3\!/_8\, gl + {}^7\!/_{16}\, pl;$$
$$Q_{x\,min} = {}^3\!/_8\, gl - {}^1\!/_{16}\, pl;$$
$$\text{für } x = l: Q_{x\,max} = -{}^5\!/_8\, gl$$
$$Q_{x\,min} = -{}^5\!/_8\, gl - {}^5\!/_8\, pl.$$

Für alle übrigen Schnittstellen aber geben die Gl. 9 und 10 gröfsere Werthe als die frühere Belastung voller Felder. Die Darstellung von $Q_{x\,max}$ und $Q_{x\,min}$ zeigt Fig. 97. Jedoch kann man auch hier an Stelle der schwach gekrümmten Kurven recht wohl gerade Linien $A_2\,C_2$ bezw. $A_1\,C_1$ setzen und braucht dann die Gl. 9 und 10 nicht zu benutzen. *)

Fig. 97.



*) Eingehende Behandlung der durchgehenden Träger findet man u. A. in den Werken: Dr. E. Winkler, Theorie der Brücken, 1. Heft, 3. Aufl., S. 90 u. f. — Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl., 2. Band, S. 322 u. f.

Sechster Abschnitt.

Durchgehende Träger mit Gelenken, Gerber'sche Träger.

I. Anordnung der Gerber'schen Träger.

Ein durchgehender Träger auf n Stützen ist $n-2$-fach statisch unbestimmt, so dass $n-2$ Elasticitäts-Gleichungen zu seiner Berechnung erforderlich sind. Diese werden entbehrlich, wenn man im Verlaufe des Trägers $n-2$ reibungslose Gelenke anbringt; an jeder solchen Stelle ist dann der Biegungswiderstand Null, also auch das Biegungsmoment gleich Null, so dass $n-2$ neue Gleichgewichts-Bedingungen entstehen. Für die Ausführung des Trägers ist ein wirkliches Gelenk meist nicht nöthig, sondern es genügt in der Regel eine einfache Auflagerung des einen Trägertheiles auf das Ende des anderen. Es muss an der betreffenden Stelle eine Querkraft, nicht aber ein Moment übertragen werden können. Zweckmäfsig wird die Anordnung so getroffen, dass die an der Gelenkstelle auftretende Querkraft stets in demselben Sinne wirkt, weil dann eben eine einfache Auflagerung hinreicht. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn auf ein mit Gelenken versehenes Trägerfeld stets ein solches ohne Gelenke folgt; auch darf die Zahl der Gelenke in einem Felde höchstens zwei betragen.

Solche Träger sind zuerst von dem bairischen Ingenieur Gerber ausgeführt worden.

Bei 3 Stützen ist ein Gelenk anzuwenden (Fig. 98). Bei 4 Stützen können die erforderlichen 2 Gelenke beide im Mittelfelde (Fig. 99), oder je eins in jedem Seitenfelde (Fig. 100) angeordnet sein. An diesen Trägern sind 4 Theile zu unterscheiden:

Fig. 98.

Fig. 99.

Fig. 100.

1) der einfache Träger *a*) bei welchem die Momenten-Nullpunkte an den Enden liegen. Ob derselbe an einem Ende auf einem Pfeiler ruht (wie bei *B* in Fig. 98, bei *A* und *B* in Fig. 100), oder sich an beiden Enden auf anschliefsende Trägertheile stützt, ist für seine Berechnung gleichgültig; er verhält sich in dieser Beziehung ganz wie ein gewöhnlicher einfacher Träger auf 2 Endstützen und wird nur durch Lasten beeinflusst, die an ihm selbst angreifen.

2) Das Kragstück *b* bildet die Verlängerung eines Trägers auf 2 Stützen, ist mit diesem steif verbunden und trägt an seinem Ende mittels Gelenkes oder gleichwerthiger Anordnung den einfachen Balken *a*. In den Figuren sind CD, $C_1 D_1$, $C_2 D_2$ solche Kragstücke.

3) Das Balkenstück *c* mit einem anschliefsenden Kragstücke ruht einerseits auf einem Endauflager und ist über der anderen festen Stütze mit dem Kragstück *b* zu einem steifen Körper verbunden. Dieses Stück wird daher nicht nur durch eigene Lasten, sondern auch durch diejenigen der anschliefsenden Theile *a* und *b* beeinflusst. AC in Fig. 98, AC_1 und BC_2 in Fig. 99 sind solche Balken *c* mit einem anschliefsenden Kragstücke.

4) Das Balkenstück *d* mit zwei anschliefsenden Kragstücken *b* ruht auf 2 festen Mittelstützen, ist über beiden mit Kragstücken *b* steif verbunden und wird daher auch durch Lasten der beiderseits anschliefsenden Theile *b* und *a* beeinflusst. Ein Trägerstück *d* ist $C_1 C_2$ in Fig. 100.

Will man die Zahl der Felder weiter vermehren, so kann man in Fig. 99 bei *B* ein Kragstück *b* anschliefsen und auf dieses wieder einen einfachen Träger *a* stützen; oder man entfernt in Fig. 100 die feste Stütze *B* und legt das Stück $a = D_2 B$ auf ein Kragstück *b* mit anschliefsendem Träger *c*, der auf 2 Stützen ruht. So fortfahrend, kann man aus den Theilen *a*, *b*, *c* und *d* Träger auf beliebig vielen Stützen zusammensetzen.

II. Einflusslinien; gröfste und kleinste Momente und Querkräfte.

Für den einfachen Trägertheil *a* gilt das auf S. 72—77 Entwickelte, nur ist durchweg *l* mit *a* zu vertauschen.

Bei gleichmäſsigen Belastungen g und $g + p = q$ ist

$$1)\quad \begin{cases} M_{x\,max} = \frac{1}{2}\, q\, x\, (a - x), \\ M_{x\,min} = \frac{1}{2}\, g\, x\, (a - x), \end{cases}$$

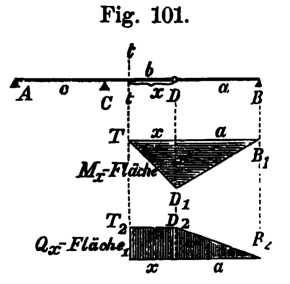
das überhaupt gröſste Moment

$$2)\quad M_1 = \frac{1}{8}\, q\, a^2;$$

$$3)\quad \begin{cases} Q_{x\,max} = q\,\dfrac{(a-x)^2}{2a} - g\,\dfrac{x^2}{2a}, \\ Q_{x\,min} = g\,\dfrac{(a-x)^2}{2a} - q\,\dfrac{x^2}{2a}. \end{cases}$$

Das Kragstück b, in Fig. 101 durch CD dargestellt. Führt man durch dasselbe einen Schnitt tt in dem Abstande x vom Gelenke D und lässt eine Last Eins vom Schnitt aus nach rechts wandern, u. zw. zunächst bis zum Gelenke D, so wächst das Moment der Last in Bezug auf die Schnittstelle, also das Biegungsmoment M_x, von Null an in gleichem Verhältnisse mit ihrem Abstande vom Schnitt und erreicht den Werth $1 \cdot x$, wenn die Last bis D gelangt ist. Dies wird durch die Einflusslinie TD_1 dargestellt. Rückt die Last über D hinaus nach rechts, so wirkt sie auf das Kragstück nur noch mittelbar, indem sie an diesem einen Gelenkdruck D erzeugt, der das Moment Dx liefert. Dieser Gelenkdruck nimmt aber, während die Last von D nach B wandert, gleichmäſsig bis auf Null ab, daher muss das Moment ebenfalls gleichmäſsig abnehmen, und man erhält hiernach die weitere Einflusslinie D_1B_1. Das Biegungsmoment M_x an einer Schnittstelle des Kragstückes ist aber immer so beschaffen, dass die entsprechende Biegungslinie ihre erhabene Seite nach oben kehrt, wir bezeichnen es daher als negativ. Dieses negative Moment wird möglichst groſs bei voller Belastung der Strecken x und a. Beim Vorhandensein von Einzellasten müssten die schwersten derselben in der Nähe des Gelenkes D angebracht werden, weil hier die Einfluss-Ordinaten am gröſsten sind. Bei gleichmäſsiger Last g oder q bekommt man die Momente einfach durch Multiplikation dieser Werthe mit der Einflussfläche.

Fig. 101.



Daher wird

4) $$M_{x\,min} = -\,{}^1\!/_2\, q\, x\, (a + x); \quad M_{x\,max} = -\,{}^1\!/_2\, g\, x\, (a + x).$$

Das dem Zahlenwerthe nach gröfste Moment am Kragstücke findet sich (für $x = b$) über der Mittelstütze C; es beträgt

5) $$M_2 = {}^1\!/_2\, q\, b\, (a + b).$$

Die Querkraft Q_x an der Schnittstelle tt, welche durch eine wandernde Lasteinheit hervorgebracht wird, ist nach der Gleichung der senkrechten Kräfte gleich Eins, solange die Last zwischen dem Schnitt und dem Gelenke D liegt, wird aber gleich dem Gelenkdrucke D, sobald die Last auf den Trägertheil a rückt, vermindert sich also mit diesem nach B hin gleichmäfsig bis auf Null. Hiermit steht die Einflussfläche für Q_x fest (s. Fig. 101), und es wird

6) $$Q_{x\,max} = q\,({}^1\!/_2\, a + x); \quad Q_{x\,min} = g\,({}^1\!/_2\, a + x).$$

Das Trägerstück c mit **einem** anschliefsenden Kragstücke, in Fig. 102 mit AC bezeichnet. Der Theil c wird durch Lasten, die an ihm selbst auftreten, genau so beeinflusst, wie ein einfacher Träger auf 2 Stützen, da das Kragstück b und der Theil a, solange sie unbelastet sind, keine Wirkung üben.

Fig. 102.

Einflussfläche für den Auflagerdruck A. Innerhalb des Feldes c ergiebt sich die Linie $A_1\,C_1$ als Einflusslinie für A. Schreitet die Last nun über die Stütze C hin nach rechts, so erfährt dadurch A keine unstetige Aenderung; zur Bestimmung von A dient nach wie vor die Momentengleichung zwischen A und der Last in Bezug auf den Punkt C, es erfährt nur das Moment der Last und damit auch A einen Zeichenwechsel. Daher ist die Gerade $A_1\,C_1$ bis D_1 zu verlängern. Am Gelenk aber tritt eine Aenderung des Gesetzes ein, weil bei weiterem Fortschreiten die Last nur noch mit dem Antheile D auf A einwirkt; daraus ergiebt sich die Fortsetzung $D_1\,B_1$ der Einflusslinie.

Die Ordinate bei D_1 ist $^1/_c \cdot b$. Es wird

$$7)\quad \begin{cases} A_{max} = q\frac{c}{2} - g\frac{b(a+b)}{2c} = q\frac{c}{2}\left(1 - \frac{g}{q}\frac{b(a+b)}{c^2}\right) \\ A_{min} = g\frac{c}{2}\left(1 - \frac{q}{g}\frac{b(a+b)}{c^2}\right). \end{cases}$$

Einflussfläche für das Moment an einer Schnittstelle tt. Innerhalb des Feldes c ergiebt sich die Einflusslinie nach dem Früheren zu $A_2\,T_2\,C_2$. Aus denselben Gründen, wie vorstehend in Bezug auf A erläutert, und weil eine Last rechts vom Schnitte zu dem Momente M_x stets den Beitrag A_x liefert, ergiebt sich, dass die Einflusslinie $T_2\,C_2$ bis D_2 einfach zu verlängern ist und dann mit einem Knick von D_2 nach B_2 sich fortsetzt. Die Ordinate von D_2 ist $^x/_c \cdot b$. Hiernach wird dann

$$8)\quad \begin{cases} M_{x\,max} = q\frac{x(c-x)}{2} - g\frac{x}{2}\frac{b(a+b)}{c}, \\ M_{x\,min} = g\frac{x(c-x)}{2} - q\frac{x}{2}\frac{b(a+b)}{c}. \end{cases}$$

Den gröfsten Werth M_3, welchen das positive Moment am Trägertheile c überhaupt erreicht, könnte man finden, indem man $M_{x\,max}$ nach x auf seinen Gröfstwerth untersuchte. Einfacher gelangt man aber zum Ziele, wenn man bedenkt, dass $M_{x\,max}$ wieder von der Form $A_x - {}^1/_2\,q x^2$ ist, dessen Gröfstwerth $\frac{A^2}{2q}$. Nimmt man nun A aus Gl. 7 für A_{max}, so wird

$$9)\quad M_3 = \frac{q c^2}{8}\left(1 - \frac{g}{q}\frac{b(a+b)}{c^2}\right)^2.$$

Einflussfläche für die Querkraft an der Schnittstelle tt. Innerhalb der Strecke c ergiebt sich für Q_x die Einflusslinie $A_3\,T_4\,T_3\,C_3$, die sich dann, übereinstimmend mit derjenigen für den Auflagerdruck, nach D_3 und B_3 fortsetzt. Es wird dann

$$10)\quad \begin{cases} Q_{x\,max} = q\frac{(c-x)^2}{2c} - g\left(\frac{x^2}{2c} + \frac{b(a+b)}{2c}\right), \\ Q_{x\,min} = g\frac{(c-x)^2}{2c} - q\left(\frac{x^2}{2c} + \frac{b(a+b)}{2c}\right). \end{cases}$$

Das Trägerstück d mit beiderseits anschliefsenden Kragstücken, in Fig. 103 mit $C_1 C_2$ bezeichnet. Auch der Theil d wird durch Lasten, die an ihm selbst angreifen, ebenso beeinflusst, wie ein einfacher Träger auf 2 Stützen.

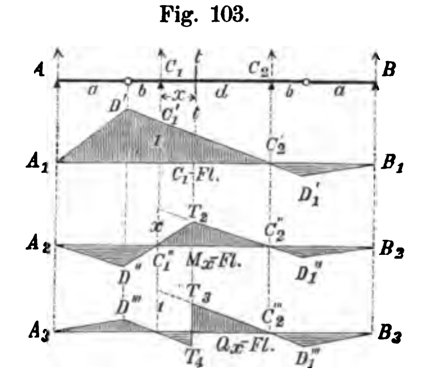


Fig. 103.

Einflussfläche für den Auflagerdruck C_1. Die Linie $C_1' C_2'$ ist selbstverständlich, und ebenso wie beim Trägerstücke c ergiebt sich die Fortsetzung $C_2' D_1' B_1$; aus denselben Gründen muss aber auch nach links die Gerade $C_2' C_1'$ bis D' weitergehn, um dann nach A_1 abzufallen. Die Ordinate von D' ist $\frac{b+d}{d}$. Es wird also

$$11) \quad \begin{cases} C_{1\,max} = q\,\dfrac{(b+d)(a+b+d)}{2d} - g\,\dfrac{b(a+b)}{2d}, \\ C_{1\,min} = g\,\dfrac{(b+d)(a+b+d)}{2d} - q\,\dfrac{b(a+b)}{2d}. \end{cases}$$

Die Einflussfläche für das Moment an der Schnittstelle tt ergiebt sich nach den bezüglich des Trägerstückes c gezogenen Schlüssen, wie in Fig. 103 gezeichnet. Die Ordinate des Punktes D'' wird $\frac{d-x}{d} \cdot b$, diejenige des Punktes D_1'' aber $\frac{x}{d} \cdot b$. Danach erhält man

$$12) \quad \begin{cases} M_{x\,max} = q\,\dfrac{x(d-x)}{2} - g\,\dfrac{b(a+b)}{2}, \\ M_{x\,min} = g\,\dfrac{x(d-x)}{2} - q\,\dfrac{b(a+b)}{2}. \end{cases}$$

Da die letzten Glieder der rechten Seiten von x unabhängig, der Gröfstwerth von $^1/_2\, x(d-x)$ aber (für $x = {^1/_2}\, d$) $^1/_8\, d^2$ ist, so wird das in der Mitte von d auftretende gröfste positive Moment:

$$13) \quad M_4 = {^1/_8}\, q d^2 - {^1/_2}\, g b (a+b).$$

Die Einflussfläche für die Querkraft Q_x in Fig. 103 bedarf ebenfalls keiner näheren Begründung mehr. Die Ordinaten der Punkte D''' und D_1''' sind $^1/_d \cdot b$. Man erhält leicht

$$14)\quad \begin{cases} Q_{x\,max} = q\left(\frac{(d-x)^2}{2d} + \frac{b(a+b)}{2d}\right) - g\left(\frac{x^2}{2d} + \frac{b(a+b)}{2d}\right), \\ Q_{x\,min} = g\left(\frac{(d-x)^2}{2d} + \frac{b(a+b)}{2d}\right) - q\left(\frac{x^2}{2d} + \frac{b(a+b)}{2d}\right). \end{cases}$$

III. Eintheilung der Spannweite.

Die vorstehenden Entwickelungen liefern für alle Stellen die gröfsten und kleinsten Momente und Querkräfte, wenn aufser den Lasten die einzelnen Längen a, b, c und d gegeben sind. Ist aber nur die ganze zu überspannende Weite und die Zahl der Zwischenstützen gegeben, so hat man bezüglich der Verhältnisse zwischen den Längen der einzelnen Theile innerhalb gewisser Grenzen freie Wahl. Es möge nun hier wieder, wie bei den durchgehenden Trägern ohne Gelenke, die Bedingung gestellt werden, dass durch Ausgleichung der in den einzelnen Theilen auftretenden gröfsten Momente das überhaupt vorkommende gröfste Moment möglichst vermindert werde. Es muss dann gleichzeitig stattfinden:

$$M_2 = M_1; \qquad M_3 = M_1; \qquad M_4 = M_1.$$

Zunächst liefern dann Gl. 2 und 5:

$$^1/_2\, q b (a+b) = {}^1/_8\, q a^2, \text{ mithin}$$

$$15)\quad b(a+b) = {}^1/_4\, a^2 \text{ und}$$

$$16)\quad b = a\left(\sqrt{^1/_2} - {}^1/_2\right) = 0{,}207\, a.$$

Sodann wird nach Gl. 2 u. 9:

$$c\left(1 - \frac{g}{q}\frac{b(a+b)}{c^2}\right) = a,$$

oder wegen Gl. 15

$$c^2 - \frac{g}{q}\frac{a^2}{4} = ac \text{ und}$$

$$17)\quad c = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{q}}\right).$$

Schliefslich giebt die Verbindung der Gl. 2 und 13 mit Berücksichtigung von Gl. 15:

18) $$d = a\sqrt{1 + \frac{g}{q}}.$$

Wichtiger als die Ausgleichung der Momente ist aber die Vermeidung negativer Auflagerdrücke. Durch starke Belastung der Strecke CB in Fig. 102 könnte der Träger bei A vor der Stütze abgehoben werden. Soll dies nicht erfolgen, so muss $A_{min} \geqq 0$, oder nach Gl. 7

$$1 - \frac{g}{q} \frac{b(a+b)}{c^2} \geqq 0 \quad \text{oder}$$

19) $$b(a+b) \leqq \frac{g}{q} c^2 \quad \text{sein.}$$

Um zu erfahren, in welchen Fällen die Bedingungen für die Momenten-Ausgleichung mit dieser Standsicherheits-Bedingung in Uebereinstimmung sind, führt man die Werthe der Gl. 15 und 17 in die Bedingung 19 ein und erhält

$$\frac{g}{q}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{q}}\right)^2 \geqq 1.$$

Durch Probieren ergiebt sich hieraus

20) $$\frac{g}{q} \geqq 0{,}23\,.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so werden die Gleichungen 16 und 17 für Ausgleichung der Momente Verhältnisse liefern, die ein Aufkippen des Trägers nicht befürchten lassen.

Auch das Trägerstück d kann, wenn auch weniger leicht, durch starke Belastung der Strecke $C_2 B$ (Fig. 103) von der Stütze C_1 abgehoben werden. Damit dies nicht erfolge, muss $C_{1\,min} \geqq 0$, also nach Gleichung 11

21) $$g(b+d)(a+b+d) \geqq q\,b\,(a+b)$$

sein. Die Ausgleich-Bedingungen 15, 16, 18 sind hiermit in Uebereinstimmung, wenn

22) $$\frac{g}{q} \geqq 0{,}09\,.$$

IV. Gelenkträger auf 3 Stützen.

Wendet man die in den Gl. 16 u. 17, S. 114 gegebenen Verhältnisse an, so wird die Weite des linksseitigen Feldes

$$l_1 = c = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 + g/_q}\right),$$

die des rechtsseitigen Feldes

$$l_2 = a + b = 1{,}207\, a \quad \text{(Fig. 104).}$$

Fig. 104.

Diese Weiten sind einander nur gleich für $g/_q = 1$, für alle anderen Fälle ist $l_2 > l_1$.

Ist eine solche Ungleichheit der Feldweiten nicht zulässig, wird vielmehr $a + b = c$ als Bedingung gestellt, so muss dafür eine der Bedingungen $M_1 = M_2$ und $M_2 = M_3$ unerfüllt bleiben. Würde man nun etwa $M_1 = M_2$ beibehalten, so erhielte man M_3 im Allgemeinen größer als M_1 und M_2, so dass der Zweck: die Herabminderung des größten Momentes, nicht erreicht sein würde. Ebenso wenig liefert die Gleichsetzung von M_1 und M_3 ein befriedigendes Ergebnis. Brauchbar ist aber die Bedingung $M_2 = M_3$, und man erhält, wenn man bedenkt, dass $a + b = c$ sein muss

$$c = b\left(1 + \sqrt{1 + g/_q}\right)^2. \tag{23}$$

Da c gegeben ist, so steht hiernach b und auch $a = c - b$ fest.

Man findet, dass dieses Verhältnis auch der Bedingung 19 (S. 115) gegen Aufkippen genügt, sobald $g/_q \geqq 0{,}23$ (übereinstimmend mit 20).

Beispiel: Ist die gesammte Weite beider Felder L und $g/_q = 0{,}5$, so können ohne Gefahr des Aufkippens die Ausgleichungs-Bedingungen benutzt werden. Man erhält

$b = 0{,}207\, a$, mithin $l_2 = a + b = 1{,}207\, a$; $l_1 = c = {}^1/_2\, a\left(1 + \sqrt{1{,}5}\right) = 1{,}112\, a$.

Daher ist die Gesammtweite $L = 2{,}319\, a$ oder $a = 0{,}431\, L$; $b = 0{,}089\, L$; $c = 0{,}480\, L$. Bei diesen Verhältnissen sind die größten Momente M_1, M_2 und M_3 einander gleich und am einfachsten nach

$$M_1 = {}^1/_8\, q a^2 = {}^1/_{32}\, q L^2 \cdot 0{,}431^2 = 0.743 \cdot {}^1/_{32}\, q L^2$$

zu berechnen. Bei der Wahl zweier einfachen Träger von der Weite ${}^1/_2 L$ wäre das größte Moment ${}^1/_{32}\, q L^2$ gewesen; die hier gewählte Anordnung ermöglicht aber eine Verminderung des größten Moments um 25,7 %.

Ist eine gleiche Weite der Felder Bedingung, so kann man nach Gl. 23 $c = b\left(1 + \sqrt{1{,}5}\right)^2 = 4{,}95\, b$, also $b = 0{,}2025\, c$ und $a = 0{,}7975\, c$ wählen. Die beiden größten Momente werden dann

$$M_3 = M_2 = {}^1/_2\, q b\,(a + b) = {}^1/_2\, q c \cdot 0{,}205\, c = 0{,}81 \cdot {}^1/_8\, q c^2 = 0{,}81 \cdot {}^1/_{32}\, q L^2.$$

Daneben wird $M_1 = \frac{1}{8}\, q a^2 = 0{,}636 \cdot \frac{1}{32}\, q L^2$. Die Verminderung des größten Momentes beträgt jetzt also nur 19 % gegenüber einfachen Trägern.

V. Gelenkträger auf 4 Stützen.

Bei 4 Stützen giebt die Ausgleichung der Momente keine Veranlassung zu unsymmetrischer Anlage.

Nach den Fig. 99 u. 100, S. 108 sind 2 verschiedene Anordnungen möglich. Legt man die Gelenke in das Mittelfeld (Fig. 105) so wird jedes Seitenfeld $l_1 = c$, das Mittelfeld $l_2 = a + 2b$. Zur Ausgleichung der Momente führen:

Fig. 105.

$$l_1 = c = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{q}}\right); \quad l_2 = 1{,}414\, a.$$

Beispiel: Ist wieder $g/q = 0{,}5$, so wird $l_1 = c = 1{,}112\, a$, mithin das Verhältnis der Feldweiten

$$v = l_2 : l_1 = 1{,}414 : 1{,}112 = 1{,}27.$$

Die Gesammtweite ist $L = (1{,}112 + 1{,}414 + 1{,}112)\, a = 3{,}638\, a$ und $a = 0{,}274\, L$; folglich $b = 0{,}057\, L$; $l_1 = c = 0{,}306\, L$; $l_2 = 0{,}388\, L$.

Das größte Moment wird $M_1 = M_2 = M_3 = \frac{1}{8}\, q a^2 = 0{,}675 \cdot \frac{1}{72}\, q L^2$, also um 32,5 % geringer als bei Einzelträgern.

Legt man aber die Gelenke in die Endfelder (Fig. 103, S. 113), so wird $l_1 = a + b$; $l_2 = d$. Zur Ausgleichung der Momente führen

$$b = 0{,}207\, a; \quad l_1 = 1{,}207\, a; \quad l_2 = d = a\sqrt{1 + g/q}.$$

Beispiel: Ist wieder $g/q = 0{,}5$, so ist nach Formel 22 (S. 115) die Ausgleichung der Momente zulässig. Es wird

$$l_1 = 1{,}207\, a; \quad l_2 = a\sqrt{1{,}5} = 1{,}224\, a;$$

hier ergiebt sich also die Mittelöffnung nur wenig größer als die Seitenöffnungen (bei kleinem g/q kann sie sogar etwas kleiner werden als letztere). Die Gesammtweite ist $L = (1{,}207 + 1{,}224 + 1{,}207)\, a = 3{,}638\, a$; da diese Verhältniszahl dieselbe ist wie im vorigen Beispiele, so muss auch das größte Moment wieder $0{,}675 \cdot \frac{1}{72}\, q L^2$ sein.

Siebenter Abschnitt.

Besondere Formen des vollwandigen Trägers auf zwei Stützen.

I. Innere Kräfte eines Trägers mit nicht parallelen Gurten.

Bei einem dünnwandigen Träger mit parallelen Gurten lassen sich die Normalkräfte an einem Querschnitte zu einem Kräftepaare $Nc = M$ zusammensetzen, die Schubkräfte zu einer Einzelkraft Q. Zu dem Widerstandsmomente tragen (nach S. 61) wesentlich nur die Gurten bei. Annähernd kann man die Normalkraft als gleichmäfsig über den Gurtquerschnitt F vertheilt ansehen; es wird dann $N = \sigma F$ und c gleich dem Abstande h der Schwerpunkte der Gurtquerschnitte von einander, mithin

Fig. 106.

$$M = Nh \quad \text{und} \quad \sigma = N : F.$$

Ferner wird Q fast allein und ziemlich gleichmäfsig von der Wand aufgenommen, daher $Q = \tau_y \delta c = \tau_y \delta h$ (annähernd), also

$$\tau_y = \frac{Q}{\delta h}.$$

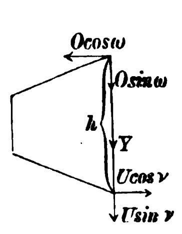
Sind nun die Gurten eines Trägers nicht parallel, haben ihre Mittellinien einen veränderlichen lothrechten Abstand h von einander, so soll wiederum die in der Längenrichtung eines jeden Gurtes auftretende gesammte innere Kraft als über den Gurtquerschnitt gleichmäfsig vertheilt angenommen werden, und auch hinsichtlich des lothrechten Abscheerungswiderstandes der Wand werde ebenfalls eine gleichmäfsige Vertheilung über die Höhe der Wand vorausgesetzt.

Fig. 107.

Nennt man (Fig. 107) die Spannkräfte der Gurten O bezw. U, ihre Neigungswinkel ω bezw. ν, die Wandscheerkraft Y (O ist als Druck gedacht), so erhält man die wagerechten Seitenkräfte $O \cos \omega$ und $U \cos \nu$,

die senkrechten Seitenkräfte $O \sin \omega$, $U \sin \nu$ und Y (Fig, 108). Ist nun, wie bisher, M die Momentsumme der äufseren Kräfte, bezogen auf einen Punkt des Querschnittes, Q die Gröfse der Resultirenden aller äufseren Kräfte am linksseitigen Trägerstücke (Q mit der Richtung aufwärts gedacht), so verlangt das Gleichgewicht:

Fig. 108.



$$O \cos \omega = U \cos \nu,$$

1) $$\boldsymbol{O \cos \omega \cdot h = U \cos \nu \cdot h = M},$$

2) $$Y = Q - (O \sin \omega + U \sin \nu).$$

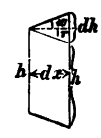
Die wagerechten Seitenkräfte der Gurten bilden also mit dem Hebelarme h das Widerstandsmoment.

Während beim Träger mit parallelen Gurten die Querkraft Q allein von der Wand aufgenommen wurde, nehmen hier die Gurten (durch ihre senkrechten Seitenkräfte) einen Theil der gesammten Querkraft Q auf, und nur der Rest Y nimmt den Scheerwiderstand der Wand in Anspruch.

Die Gurtkräfte O und U sind nach Gl. 1 aus dem Momente M unmittelbar zu berechnen, nämlich $O = \frac{M}{h \cos \omega}$, $U = \frac{M}{h \cos \nu}$. Durch Einführung dieser Werthe entsteht aus Gl. 2:

$$Y = Q - \frac{M}{h}(\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \nu).$$

Fig. 109.



Ist aber (Fig. 109) dh die Zunahme der Trägerhöhe auf ein Längentheilchen dx, so wird $dh = dx(\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \nu)$, mithin

3) $$\boldsymbol{Y = Q - \frac{M}{h}\frac{dh}{dx}}.$$

Für $\frac{dh}{dx} \gtrless 0$ ist $Y \lesseqgtr Q$.

Es ist nun nach S. 53, Gl. 1, die Querkraft $Q = \frac{dM}{dx}$, folglich $Y = \frac{dM}{dx} - \frac{M}{h}\frac{dh}{dx}$; dies kann aber noch kürzer geschrieben werden. Es ist nämlich

$$d\left(\frac{M}{h}\right) = \frac{dM}{h} - M\frac{dh}{h^2} = \frac{1}{h}\left(dM - M\frac{dh}{h}\right),$$

so dass

$$4)\qquad Y = h\,\frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{dx}\quad \text{entsteht.}$$

Aendern sich nun M und h in gleichem Verhältnisse, wird $M:h$ unveränderlich, so wird $Y=0$.

Bei derjenigen Belastungsart also, bei welcher sich Moment und Trägerhöhe in gleichem Verhältnis ändern, ist die Wandscheerkraft gleich Null.

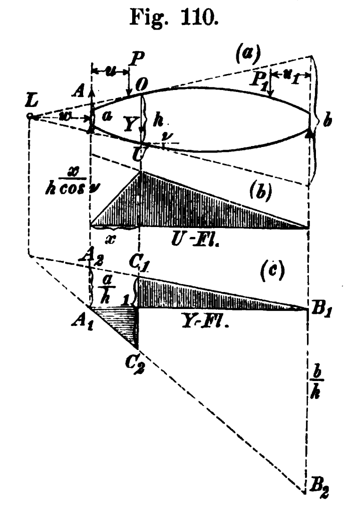
II. Einflusslinien eines einfachen Trägers mit nicht parallelen Gurten.

Einflusslinien für die Gurtkräfte O und M. Da

$$O = \frac{M}{h \cos \omega}, \quad U = \frac{M}{h \cos \nu},$$

so sind die Einflusslinien für diese von derselben Form wie diejenigen für M (s. Fig. 74, S. 72), die Ordinaten sind nur durch $h \cos \omega$ bezw. $h \cos \nu$ zu theilen. Man trage daher am linksseitigen Auflager nicht x, sondern $\frac{x}{h \cos \omega}$ bezw. $\frac{x}{h \cos \nu}$ auf und verfahre im Uebrigen wie früher (Fig. 110, b). Diese Verhältniszahlen sind nach einem willkürlichen Kräfte-Maſsstabe aufzuzeichnen. Bezüglich der ungünstigsten Belastungsart für die Gurtkräfte gilt hiernach dasselbe wie für das Biegungsmoment.

Fig. 110.



Einflusslinie für die Wandscheerkraft Y. Um Y zu finden, verlängert man die Richtungen der Gurtkräfte O und U (Tangenten an die Mittellinien der Gurten) bis zum Schnittpunkte L und stellt in Bezug auf diesen die Momentengleichung auf; in dieser kommen dann O und U nicht vor, und Y ist die einzige Unbekannte. Daher ist die Lage dieses Drehpunktes L maſsgebend, u. zw. werde zunächst L

links von der Spannweite, im Abstande w von A, angenommen (Fig. 110, *a*).

Die Lasten P und P_1 bedingen den Auflagerdruck

$$A = P - P\frac{u}{l} + P_1\frac{u_1}{l},$$

und es wird dann

$$Y(w + x) = Aw - P(w + u) = -Pu\left(1 + \frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}.$$

Setzt man $P = 0$, $P_1 = 1$, so wird die Einfluss-Ordinate rechts vom Schnitte

$$\eta_1 = \frac{u_1 w}{l(w + x)};$$

setzt man aber $P_1 = 0$, $P = 1$, so wird die linksseitige Einfluss-Ordinate

$$\eta = \frac{u}{l}\frac{w + l}{w + x}.$$

Macht man nun (Fig. 110, *c*) $A_1 A_2 = \frac{w}{w + x}$, $B_1 B_2 = \frac{w + l}{w + x}$, zieht $A_1 C_2 B_2$ und $B_1 C_1 A_2$, so bilden die Stücke $A_1 C_2$ und $B_1 C_1$ die Einflusslinien. Links vom Schnitte sind die Einflüsse negativ, rechts positiv. Da die Abschnitte $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ sich verhalten wie w zu $w + l$, so ist ersichtlich, dass die beiden Stücke der Einflusslinie sich auf einer Senkrechten durch den Drehpunkt L schneiden müssen. — Schneiden die Richtungen von O und U (Fig. 110, *a*) auf den Stützensenkrechten die Stücke a und b ab, so ist $w : w + x = a : h$, $w + l : w + x = b : h$, man kann daher in Fig. 110, c auch

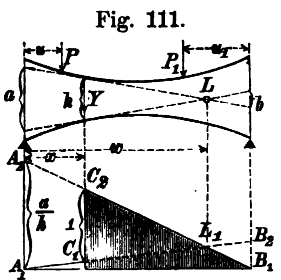
$$A_1 A_2 = \frac{a}{h}, \quad B_1 B_2 = \frac{b}{h} \quad \text{auftragen.}$$

Wählt man den Schnitt in der Nähe des rechtsseitigen Auflagers, so dass die Richtungen von O und U sich rechts von der Spannweite schneiden, so wird $a > b$; die Einflussfigur ändert sich dem entsprechend, doch bleiben nach wie vor die Einflüsse rechts vom Schnitte positiv, links negativ, so dass der gröfste positive Werth der Wandscheerkraft Y_{max} bei einseitiger Belastung rechts vom Schnitte, dagegen Y_{min} bei einseitiger Belastung links vom Schnitt entsteht; es gelten daher für Y dieselben Belastungsgesetze wie für Q_x (S. 75).

Ist aber der Träger so gestaltet, dass die Richtungen der Gurtkräfte O und U einer Schnittstelle sich innerhalb der Spannweite schneiden, so ergiebt sich (nach Fig. 111):

$$Y(w-x) = Pu\left(1-\frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l};$$

Fig. 111.



die Einfluss-Ordinaten links und rechts vom Schnitte werden

$$\eta = \frac{u}{l}\,\frac{l-w}{w-x} = \frac{u}{l}\,\frac{b}{h} \text{ bezw.}$$

$$\eta_1 = \frac{u_1}{l}\,\frac{w}{w-x} = \frac{u_1}{l}\,\frac{a}{h},$$

d. h. beide positiv. Um die Einflusslinien zu erhalten, hat man $A_1 A_2 = a/_h$, $B_1 B_2 = b/_h$ beide nach der positiven Seite aufzutragen und im Uebrigen zu verfahren wie früher. $A_1 B_2$ und $B_1 A_2$ schneiden sich wieder in L_1 auf der Senkrechten durch L. Liegt der Schnitt näher an dem rechten Auflager, so dass sich L links vom Schnitte ergiebt, so findet man, dass die Einfluss-Ordinaten durchweg negativ werden, dass man $a/_b$ und $b/_h$ beide nach der negativen Seite aufzutragen hat.

An der Schnittstelle ändert sich in allen Fällen die Gröfse der Einfluss-Ordinate für Y um die Lasteinheit $C_1 C_2$, denn während sich die Lasteinheit von rechts nach links über die Schnittstelle hinweg bewegt, tritt sie plötzlich als neue Kraft zu den Kräften am linksseitigen Abschnitte hinzu und muss, da sie in diesem Augenblicke genau mit Y zusammenfällt, diese Kraft um ihre eigene Gröfse entlasten, d. h. vermindern.

Für den gewöhnlichen Fall, dass der Schnittpunkt L die Gurtrichtungen aufserhalb der Spannweite liegt, gilt daher für die Wandscheerkraft Y dasselbe Belastungsgesetz wie für die Querkraft Q_x: es müssen Y_{max} und Y_{min} auf **einseitige** Belastung berechnet werden. Liegt aber der Drehpunkt L (ausnahmsweise) **innerhalb** der Spannweite, so ist Y für **volle** Belastung zu berechnen.

III. Parabolischer Träger.

Stellt man die Bedingung, dass bei gleichmäfsiger Belastung des ganzen Trägers die Wandscheerkraft Y an allen Stellen

verschwinde, so muss nach Gl. 4, S. 120 die Trägerhöhe h sich in gleichem Verhältnisse mit dem Momente, d. h. nach **parabolischem** Gesetz ändern, weil bei dieser Belastungsart die Darstellung der Momente eine Parabel ist. Die Gleichung für das Moment lautet:

$$M = \tfrac{1}{2} q x (l - x), \quad \text{mithin wird} \quad h = \tfrac{1}{2} q x (l - x) \cdot C.$$

Ist nun für $x = \tfrac{1}{2} l$ die Trägerhöhe in der Mitte und zugleich die gröfste Trägerhöhe $h = h_m$, so wird $h_m = \tfrac{1}{8} q l^2 \cdot C$, mithin nach Entfernung von C:

$$1) \qquad h = \frac{4 h_m}{l^2} x (l - x) = h_m \frac{x}{l/2} \frac{l - x}{l/2}.$$

Ein nach dieser Gleichung gestalteter Träger heifst **parabolischer Träger**. Dem einen Gurte kann man beliebige Form geben, nur muss die von diesem aus gemessene lothrechte Trägerhöhe dem Parabelgesetze 1) folgen. Gewöhnlich macht man aber einen Gurt gerade, den anderen parabolisch, oder beide parabolisch, u. zw. mit Krümmung nach entgegengesetzten Seiten oder (seltener) nach derselben Seite (Sichelträger).

Unter Annahme einer gleichmäfsigen ständigen Last g und einer ebenfalls gleichmäfsigen beweglichen Last p sollen nun die gröfsten Werthe der Gurtkräfte und der Wandscheerkraft ermittelt werden.

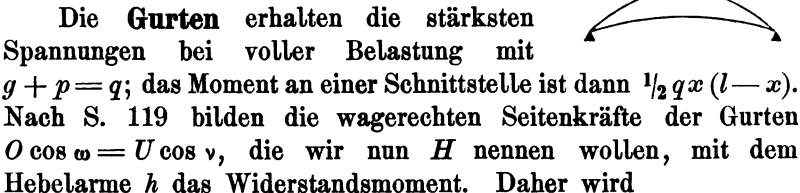


Fig. 112.

Die **Gurten** erhalten die stärksten Spannungen bei voller Belastung mit $g + p = q$; das Moment an einer Schnittstelle ist dann $\tfrac{1}{2} q x (l - x)$. Nach S. 119 bilden die wagerechten Seitenkräfte der Gurten $O \cos \omega = U \cos \nu$, die wir nun H nennen wollen, mit dem Hebelarme h das Widerstandsmoment. Daher wird

$$H h = \tfrac{1}{2} q x (l - x);$$

setzt man hier den Werth vor h aus Gl. 1, S. 123 ein, so entsteht

$$2) \qquad H = \frac{q l^2}{8 h_m}.$$

D. h.: **Bei voller Belastung hat die wagerechte Seitenkraft der Gurten eines parabolischen Trägers längs der ganzen Trägerlänge den gleicher Werthe.** Derselbe

ist leicht zu berechnen, indem man das Moment $\frac{1}{8} q l^2$ in der Mitte durch die Trägerhöhe h_m in der Mitte theilt.

Die Gurtkräfte selbst sind

$$O = H \sec \omega, \qquad U = H \sec \nu.$$

Ist der eine Gurt (beispielsweise der untere) gerade, so ist dessen Spannkraft überall von der gleichen Gröfse H. In dem anderen parabolischen Gurte herrscht in der Mitte auch die Kraft H, nach den Auflagern nimmt aber die Gurtkraft O mit $\sec \omega$ zu. An den Enden ist (Fig. 112 a)

$$\operatorname{tg} \omega_1 = 2 h_m : \frac{1}{2} l = \frac{4 h_m}{l}, \quad \text{mithin} \quad \sec \omega_1 = \sqrt{1 + \frac{16 h_m^2}{l^2}}.$$

Für $h_m = \frac{1}{8} l$ ist beispielsweise $\sec \omega_1 = \sqrt{5/4} = 1{,}12$, d. h. die Gurtkraft nimmt von der Mitte nach den Enden hin um 12 % zu.

Vertheilt sich die Pfeilhöhe gleichmäfsig auf beide Gurten (Fig. 112, b) so wird

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{2 h_m}{l} \quad \text{und} \quad \sec \omega_1 = \sqrt{1 + \frac{4 h_m^2}{l^2}}.$$

Ist daher wieder $h_m = \frac{1}{8} l$, so wird $\sec \omega_1 = \sqrt{1 + 1/16} = 1{,}03$, oder die Zunahme der Gurtkraft beträgt in diesem Falle nur 3 %.

Die **Wandscheerkraft** erreicht ihren gröfsten Werth Y_{max} bei einseitiger Belastung rechts vom Schnitte. Die ständige Belastung g der ganzen Trägerlänge bringt aber nach der Grundbedingung des parabolischen Trägers die Wandscheerkraft $Y = 0$ hervor, so dass hier nur die bewegliche Last p in Frage kommt.

Fig. 113.

Für die Lage des Drehpunktes L gilt nach Fig. 113:

$$\frac{h}{w + x} = \frac{dh}{dx} = \frac{4 h_m}{l^2} (l - 2x)$$

(nach Gl. 1); also

$$w + x = \frac{h l^2}{4 h_m (l - 2x)} = \frac{x (l - x)}{l - 2x},$$

mithin

$$w = \frac{x^2}{l - 2x} \quad \text{und}$$

$$3) \qquad \frac{w}{w + x} = \frac{x}{l - x}.$$

Daraus ergiebt sich nach S. 121 die in Fig. 113 gezeichnete Einflussfigur für Y. Die positive Einfluss-Ordinate an der Schnittstelle beträgt $\frac{x}{l-x}\frac{l-x}{l} = \frac{x}{l}$, der Inhalt der gesammten positiven Einflussfläche also $\frac{x}{l}\frac{l-x}{2}$, die Einwirkung der rechtsseitigen Belastung daher $Y_{max} = \frac{p}{2}\frac{x(l-x)}{l}$. Da hierin das parabolische Glied $x(l-x)$ vorkommt, so kann man dieses nach Gl. 1 durch $\frac{h l^2}{4 h_m}$ ersetzen und erhält kürzer

$$4)\qquad Y_{max} = \frac{p l}{8}\frac{h}{h_m}.$$

Y_{min} entsteht, wenn die Strecke links vom Schnitte mit p belastet ist. Die negative Einflussfläche in Fig. 113 muss aber mit der positiven den gleichen Inhalt haben, weil ja eine gleichmäfsige Belastung des ganzen Trägers Y zu Null macht; daher ist $Y_{min} = - Y_{max}$ und

$$5)\qquad Y_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{pl}{8}\frac{h}{h_m};$$

oder: Die gröfste positive und die gröfste negative Wandscheerkraft haben beim parabolischen Träger gleichen absoluten Werth und ändern sich in gleichem Verhältnisse mit der Trägerhöhe h der betreffenden Schnittstelle.

In der Trägermitte, wo die Gurten parallel, ist die Wandscheerkraft Y_{max} gleichbedeutend mit der Querkraft Q_{max}; letztere hat aber nach S. 76 (und wie sich leicht ohne Weiteres berechnen lässt) den Werth $\frac{1}{8}pl$; hat man sich daher nur gemerkt, dass beim parabolischen Träger Y_{max} mit h verhältnisgleich ist, so kann man Gl. 5 ohne besondere Rechnung leicht anschreiben.

Nimmt man an, dass die Scheerkraft Y_{max} sich gleichmäfsig über die Wandhöhe h vertheilt, so kommt (bei der Wandstärke δ) auf die Flächeneinheit $\tau_y = \frac{p l}{8 h_m \delta}$, d. h. ein überall gleicher Werth.

Mit Rücksicht darauf, dass diese überall gleiche Schubspannung an jedem Schnitte mit einer starken Normalspannung der Gurten zusammentrifft, wähle man für τ_y (wie auf S. 67) etwa $\frac{4}{10}$ der zulässigen Anstrengung, setze also $\tau_y = 0{,}4\,s$; dann erhält man als erforderliche Wandstärke

$$\delta = \frac{1}{8}\frac{p l}{0{,}4\,s\,h_m}.$$

Von Interesse ist der Vergleich des parabolischen Trägers mit dem Parallelträger (dem Träger mit parallelen Gurten).

Beim Parallelträger nehmen die Gurten im Wesentlichen nur das Moment auf; wegen der unveränderlichen Höhe h_m ändern sich die Gurtkräfte verhältnisgleich mit dem Momente, nehmen daher von der Mitte nach dem Ende hin von dem gröfsten Werthe $\frac{q l^2}{8 h_m}$ bis auf Null ab, u. zw. nach parabolischem Gesetze. — Die Wand hat die ganze Querkraft Q aufzunehmen, welche in der Mitte am kleinsten ist, nämlich $\pm \, {}^1/_8 \, p l$, nach den Enden aber auf mehr als das Vierfache (bis zu ${}^1/_2 \, q l$) zunimmt.

Beim parabolischen Träger findet eine Abnahme der Gurtkräfte nach den Enden hin nicht statt, vielmehr behält deren wagerechte Seitenkraft durchweg denselben Werth $H = \frac{q l^2}{8 h_m}$, und die Gurtkräfte selbst nehmen, wenigstens in einem gekrümmten Gurt, nach den Auflagen hin sogar um einige Hunderstel zu. — Die Wandscheerkraft hat in der Mitte (naturgemäfs) denselben Werth wie beim Parallelträger, erfährt aber nach den Auflagern hin nicht etwa eine erhebliche Zunahme, sondern vielmehr eine Abnahme bis auf Null.

IV. Pauli'scher Träger.

Wurden beim parabolischen Träger beide Gurten symmetrisch gekrümmt, so betrug die Zunahme der Gurtkraft nach den Enden hin bei $h_m = {}^1/_8 \, l$ nur etwa 3 % (S. 124). Daraus kann man schliefsen, dass eine geringe Formänderung ermöglichen wird, überall gleiche Gurtkräfte zu bekommen. Dieser Bedingung genügt der von dem Ingenieur Pauli ersonnene Träger.

An beliebiger Schnittstelle ist $O \cos \omega \, h = {}^1/_2 \, q x (l - x)$ (Fig. 114). Dieselbe Spannkraft O soll nun auch in der Mitte sich finden, so dass auch $O h_m = {}^1/_8 \, q l^2$. Aus beiden Gleichungen folgt für die Trägerhöhe an beliebiger Stelle

Fig. 114.

$$h = \frac{4 h_m}{l^2} x (l - x) \sec \omega .$$

Darin ist ω noch unbekannt; es ist nämlich $\operatorname{tg}\omega = \frac{d\left(\frac{h}{2}\right)}{dx}$ und

$$\sec\omega = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\frac{dh^2}{dx^2}}, \text{ so dass}$$

1) $$h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x\,(l - x)\left(1 + \frac{1}{4}\frac{dh^2}{dx^2}\right)^{1/2} \text{ wird.}$$

Dies ist die Differentialgleichung des Pauli'schen Trägers (weit aufser h und x auch $dh:dx$ vorkommt); dieselbe lässt sich in geschlossener Form nicht lösen. Weil aber, wie oben bemerkt, der Träger nur wenig von dem parabolischen abweichen kann, so ist es genau genug, den immerhin nur kleinen Werth $dh:dx$ annäherungsweise von der Gleichung des parabolischen Trägers zu entnehmen und in Gl. 1 einzusetzen. Dann folgt aus $h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x\,(l - x)$:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{4\,h_m}{l}\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)$$

und $$\left(1 + \frac{1}{4}\frac{dh^2}{dx^2}\right)^{1/2} = \left\{1 + \frac{4\,h_m^2}{l^2}\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Ist aber $h_m : l \leqq {}^1\!/_8$, so wird

$$\frac{4\,h_m^2}{l^2}\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)^2 \leqq \frac{1}{16},$$

so dass man zur weiteren Abkürzung noch

$$\left(1 + \frac{1}{4}\frac{dh^2}{dx^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{8}\frac{dh^2}{dx^2} - + \ldots.$$

mit alleiniger Benutzung der beiden ersten Glieder setzen kann. Dann entsteht

2) $$h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x\,(l - x)\left\{1 + \frac{2\,h_m^2}{l^2}\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)^2\right\}$$

als Annäherungsgleichung des Pauli'schen Trägers.

Da die Trägerform nur wenig von der des parabolischen Trägers abweicht, so können natürlich auch die Eigenschaften beider nur wenig von einander verschieden sein. Die Wandscheerkraft Y, deren gröfster absoluter Werth beim parabolischen Träger so klein war, wie überhaupt nur möglich, wird hier

etwas gröfser ausfallen. Allgemeine Gleichungen dafür werden reichlich verwickelt, man kann aber in jedem besonderen Falle für jede Schnittstelle leicht die Lage des Drehpunktes L und darnach die Einflussfigur für Y bestimmen, woraus sich dann Y_{max} und Y_{min} ergeben. Die ständige Belastung hat hier auch einen, allerdings nur geringen, Einfluss auf Y.

Achter Abschnitt.

Druckbelastung eines prismatischen Stabes in der Richtung seiner Achse.

I. Centrische Druckbelastung; Knickfestigkeit.

Wird ein prismatischer Stab an seinen beiden Endflächen gleichen und entgegengesetzten Druckkräften P ausgesetzt, deren Richtungslinien in die ursprüngliche Achse des Stabes fallen, so erfährt er bei geringer Länge eine einfache Verkürzung in gerader Richtung. Bei vollkommener Erfüllung aller Voraussetzungen, d. h. vollkommen prismatischer Gestalt, völliger Gleichmäfsigkeit des Stoffes, genau richtiger Lage der Kräfte, müsste dies auch bei gröfserer Länge stattfinden; denn zu einer Ausbiegung nach einer bestimmten Richtung würde keine Veranlassung vorliegen; eine Ausbiegung nach der einen Seite hat nicht mehr Wahrscheinlichkeit für sich als die nach der entgegengesetzten Seite. In Folge unvermeidlicher kleiner Abweichungen von dem angenommenen Anfangszustande können aber erfahrungsmäfsig Biegungen eintreten, so dass der Stab nicht mehr auf einfachen gleichmäfsigen Druck beansprucht wird. Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen der Stab unter Einwirkung der beiden Druckkräfte P in gebogenem Zustande im Gleichgewichte sein kann.

Fig. 115.

Die Mittellinie des Stabes gehe in die gekrümmte Form ACB (Fig. 115) über, u. zw. liege diese Kurve in der Zeichen-Ebene. Die Richtung der ursprünglichen Stabachse werde zur X-Achse, der Punkt A zum Anfangspunkte gewählt; ein Punkt M der Biegungslinie habe die Koordinaten x und y.

Führt man durch M einen rechtwinkligen Querschnitt und betrachtet den unteren Abschnitt (Fig. 116), so ist P die einzige äufsere Kraft an demselben, und ihr müssen die inneren Kräfte an der Schnittstelle das Gleichgewicht halten. Diese Kraft P nun, welche in dem Abstande y an dem Schwerpunkte M der Schnittfläche vorbei geht, kann, ohne dass dadurch in dem Gleichgewichtszustande eine Aenderung hervorgebracht würde, mit einer durch M gehenden Kraft P und einem Kräftepaare vom Momente Py vertauscht werden. Dem entsprechend kann man die inneren Kräfte ebenfalls zerlegen in diejenigen, welche der centrisch wirkenden Einzelkraft, und solche, die dem Momente Py das Gleichgewicht halten.

Fig. 116.

Die Einzelkraft P steht nicht ganz rechtwinklig zur Schnittebene, müsste daher eigentlich noch in Normal- und Querkraft zerlegt werden. Doch wollen wir nur geringe Biegungen voraussetzen, so dass die Abweichung der Kraft P von der Rechtwinkligen zur Schnittebene vernachlässigt werden kann. Unter dieser Voraussetzung wird die Einzelkraft P eine über den Querschnitt gleichmäfsig vertheilte Druckspannung $P/_F$ erzeugen.

Das Moment Py liegt in der Biegungsebene und erfüllt daher die Bedingung einer sog. geraden Belastung (s. S. 32), so dass für die Spannungs- und Biegungs-Verhältnisse die bekannten einfachsten Formeln (S. 33) zur Anwendung kommen. Es ergiebt sich daraus eine Biegungsspannung:

$\frac{Pye'}{J}$ an der konvexen Seite als Zug,

$\frac{Pye''}{J}$ an der konkaven Seite als Druck.

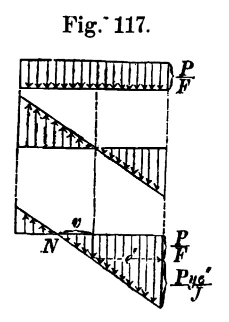


Fig. 117.

Ueber den Querschnitt vertheilen sich die Biegungsspannungen nach geradlinigem Gesetze. Darin ist J das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf eine zur Biegungsebene rechtwinklige Achse durch den Schwerpunkt M des Querschnitts, d. h., weil eine gerade Belastung vorliegt, eins der beiden Haupt-Trägheitsmomente.

Fügt man nun (nach Fig. 117) die einfachen Druckspannungen $P/_F$ mit den Biegungsspannungen zusammen, so wird die stärkste Druckspannung

$$\sigma'' = \frac{P}{F} + \frac{P y e''}{J} = \frac{P}{F}\left(\frac{F y e''}{J} + 1\right),$$

die stärkste Zugspannung

$$\sigma' = -\frac{P}{F} + \frac{P y e'}{J} = \frac{P}{F}\left(\frac{F y e'}{J} - 1\right).$$

Eine wirkliche Zugspannung kommt nur vor, wenn $\frac{F y e'}{J} > 1$ ist; andernfalls ist auch σ' eine Druckspannung und hat dann, weil sie $< \sigma''$, kein besonderes Interesse.

Im Schwerpunkte des Querschnittes herrscht stets nur die einfache Druckspannung $P/_F$, weil die Biegungsspannung dort Null.

Die Nulllinie N, in welcher die gesammte Spannung Null ist, geht hier nicht durch den Schwerpunkt, sondern ist um v nach der konvexen Seite hin verschoben, u. zw. ist nach der Figur

1) $$\frac{v}{e''} = \frac{P/_F}{\frac{P y e''}{J}} \quad \text{oder} \quad v = \frac{J}{F y},$$

also v umgekehrt proportional mit y.

Da die hier betrachteten Spannungen reine Normalspannungen sind, so haben wir in ihnen auch die stärksten Spannungen (das Spannungs-Ellipsoid wird für jeden Punkt zu einer Geraden). Die Spannungen sind mit den Anstrengungen gleichwerthig.

Die Spannungen σ' und σ'' sind von der Ordinate y abhängig. Bezeichnet man die gröfste Durchbiegung mit f, so werden die stärksten Spannungen

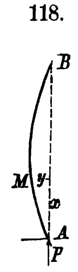
2) $$\begin{cases} \sigma'' = \frac{P}{F}\left(\frac{F f e''}{J} + 1\right) \\ \sigma' = \frac{P}{F}\left(\frac{F f e'}{J} - 1\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind aber nicht benutzbar, solange die Durchbiegung f nicht ermittelt ist.

Die Euler'sche Formel. Wie nun die Spannungen zerlegt wurden, so kann auch die elastische Formänderung in 2 Theile geschieden werden: den gleichförmig über den Querschnitt ver-

theilten Druckspannungen $P/_F$ entspricht eine einfache Verkürzung des ganzen Stabes. Diese ist in den meisten Fällen sehr unbedeutend, beträgt z. B. für Schmiedeisen selten mehr als $^1/_{3000}$ der Länge. Die Durchbiegung ist (hiervon ziemlich unabhängig) mit dem Auftreten der Biegungsspannungen verknüpft; man kann daher, unter Vernachlässigung der gleichmäßsigen Verkürzung in der Längenrichtung, die Biegungslinie aus dem Momente Py entwickeln (Fig. 118).

Fig. 118.



Da die Kurve der positiven Seite der X-Achse die **konkave** Seite zukehrt, so ist nach S. 34

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Py}{EJ},$$

oder, wenn man $\frac{P}{EJ} = \frac{1}{r^2}$ setzt,

$$3)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{y}{r^2}.$$

Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$4)\qquad y = A \sin\frac{x}{r} + B \cos\frac{x}{r}.$$

Nun ist aber für die Endpunkte A und B der Kurve die Ordinate $y = 0$. Setzt man daher in Gl. 4 $x = 0$ und $y = 0$, so entsteht

$$0 = A \sin 0 + B \cos 0, \quad \text{also } B = 0;$$

Gl. 4 wird daher

$$5)\qquad y = A \sin\frac{x}{r}.$$

Setzt man hierin $x = AB = l$ und $y = 0$, so wird

$$0 = A \sin {l}/_{r},$$

d. h. es muss von den beiden Faktoren der rechten Seite wenigstens einer Null sein. $A = 0$ würde auch y durchweg zu Null machen, sich also auf die günstige Möglichkeit beziehen, dass der Stab keine Ausbiegung erleidet. Setzt man aber die Möglichkeit einer Ausbiegung voraus und fragt nach der Bedingung, unter welcher der Stab bei g e b o g e n e m Zustande im Gleichgewichte sein kann, so hat man die zweite Lösung: $\sin {l}/_{r} = 0$, zu benutzen. Diese verlangt, dass $l/_r$ ein Vielfaches von π sei, mithin

$$6)\qquad l = nr\pi \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} = \frac{n\pi}{l}.$$

Weil nun $P = \frac{EJ}{r^2}$ gesetzt war, so liefert die letzte Bedingung

7) $$P = EJ\frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

worin n irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Einen bestimmten Werth für die Konstante A in Gl. 5 liefert diese Lösung nicht, es wird vielmehr $A = \frac{0}{\sin {}^l/_r} = \frac{0}{0}$. Die Bedeutung von A lässt sich allerdings aus Gl. 5 erkennen. Danach ändert sich y verhältnisgleich mit $\sin {}^x/_r$; letztere Gröfse hat aber den Höchstwerth Eins, es wird daher $y_{max} = A \cdot 1 = A$, d. h. A bedeutet die gröfste vorkommende Durchbiegung f, deren Werth aber unbestimmt bleibt. Setzt man $A = f$, so kann die Gleichung der Biegungslinie auch geschrieben werden:

8) $$y = f \sin\frac{x}{r} = f \sin n\pi\frac{x}{l}.$$

Hieraus ist zu folgern, dass, wenn überhaupt die Druckkräfte P den Stab bei gebogenem Zustande im Gleichgewichte halten können, dieser Gleichgewichts-Zustand auch bei jedem Werthe der Durchbiegung f möglich ist; jene Kräfte P können dann den Stab auch bis zum Zerknicken durchbiegen. Damit aber im gebogenen Zustande Gleichgewicht bestehen könne, muss die Druckkraft nach Gl. 7 den Werth $P = EJ\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ haben. Eine kleinere Druckkraft vermag den Stab nicht im gebogenen Zustande zu erhalten oder ihm eine Biegung zu ertheilen, während jener bestimmte Werth von P den Stab schon in die Gefahr des Zerknickens bringt.

Fig. 119.

Nun ist aber noch die Bedeutung der Zahl n zu untersuchen. Die Darstellung der Gl. 8 ist eine Wellenlinie (Fig. 119). Jedesmal, wenn bei stetiger Zunahme von x die Gröfse ${}^x/_r$ um 2π, also x um $2r\pi$ gewachsen ist, bekommt y die gleichen Werthe wieder; $2r\pi$ bedeutet daher die Länge einer ganzen Welle, $r\pi = \lambda$ diejenige einer halben Welle. Weil nun nach Gl. 6 $l = nr\pi$, so wird $l = n\lambda$; d. h. n ist die Anzahl der halben Wellen, die in der Biegungslinie des Stabes vorkommen. Da nun n im Allgemeinen willkürlich, so kann sich der Stab bei der Biegung in jede beliebige Anzahl halber Wellen zertheilen.

Für $n = 1$ biegt sich der Stab nur nach einer halben Welle, und die zerknickende Kraft wird

$$P_1 = EJ\frac{\pi^2}{l^2} \text{ (Fig. 120).}$$

Fig. 120.

Für $n = 2$ erhält man zwei halbe Wellen

und $P = 4\,EJ\frac{\pi^2}{l^2}$.

Für $n = 3$ entstehen drei halbe Wellen

mit $P = 9\,EJ\frac{\pi^2}{l^2}$, u. s. f.

Da die zerknickende Kraft für $n = 1$ am kleinsten, so wird man in der Regel diesen Fall vorauszusetzen haben. Wird der Stab aber in der Mitte bei C, oder in den Drittels-Theilpunkten D und D_1 etwa so festgehalten, dass er an diesen Stellen nicht ausweichen kann, dann würde man allerdings berechtigt sein, $n = 2$ bezw. $n = 3$ anzunehmen.

J bedeutet eins der beiden Hauptträgheitsmomente; da aber die zerknickende Kraft mit J proportional, so hat man dafür das kleinste der beiden Hauptträgheitsmomente, also überhaupt das kleinste Trägheitsmoment der Querschnittsfigur einzuführen. Die Ausbiegung wird daher rechtwinklig zur zweiten Schwerpunkts-Hauptachse, d. h. in der Richtung der ersten Hauptachse zu erwarten sein.

Das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung, dass für $P < EJ\frac{\pi^2}{l^2}$ noch keine Durchbiegung entsteht, dass aber dann plötzlich $P = EJ\frac{\pi^2}{l^2}$ jede beliebig große Biegung erzeugen, also zum Zerknicken des Stabes führen kann, stimmt mit Versuchen nicht ganz überein. Eine schärfere Untersuchung der Biegungslinie, bei welcher man anstatt der Annäherungs-Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{M}{EJ}$ die genauere Gleichung $\frac{1}{\rho} = \pm\frac{M}{EJ}$ verwendet (s. Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2. Aufl., S. 168), führt denn auch nach einer umständlicheren Rechnung zu der etwas befriedigenderen Lösung, dass, sobald die Druckkraft den Werth $\frac{EJ\pi^2}{l^2}$ erreicht, die Durchbiegung noch nicht jeden beliebigen Werth annehmen kann, sondern noch die Gröſse Null bekommt, und dass für jeden Werth von P über $EJ\frac{\pi^2}{l^2}$ hinaus eine ganz bestimmte Durchbiegung f entsteht. Wendet man aber die schärfere Gleichung auf bestimmte Fälle an, so ergiebt sich, dass die Vergröſserung von P nur sehr gering zu sein braucht, um schon eine un-

zulässig grofse Durchbiegung hervorzubringen. $P_1 = EJ\frac{\pi^2}{l^2}$ ist daher auch nach der schärferen Rechnung wenigstens annäherungsweise als die zerknickende Kraft zu bezeichnen. Die genauere Untersuchung führt hiernach für die Anwendung zu keiner wesentlich besseren Lösung als die hier gegebene Entwickelung und ist aus diesem Grunde hier nicht mitgetheilt worden.

Die Formel für die zerknickende Kraft

$$P_1 = EJ\frac{\pi^2}{l^2} \tag{9}$$

wurde von Euler entwickelt und heifst hiernach die Euler'sche Formel.

Wie weit man sich mit der wirklichen Belastung eines Stabes dem Werthe der zerknickenden Kraft nähern darf, ist gröfstentheils Sache der Erfahrung. Für Stäbe, die in Bauverbänden vorkommen, pflegt man bei der Verwendung von Schmiedeeisen $^1/_5$, bei Gusseisen $^1/_6$, bei Holz $^1/_{10}$ der zerknickenden Kraft als zulässige Belastung zu wählen.

Je kleiner die freie Länge l des Stabes wird, desto gröfser wird nach Gl. 9 die zerknickende Kraft; diese wird bei einer gewissen Länge l die Festigkeit gegen einfachen Druck zu übersteigen beginnen, und bei weiterer Verkürzung wird der Stab dann leichter zerdrückt als zerknickt werden. Selbstverständlich muss daher in jedem Falle geprüft werden, ob auch die mit Rücksicht auf das Zerknicken zulässige Last P nicht eine unzulässige (einfache) Druckspannung $\sigma = P/F$ liefert.

Die Formel von Schwarz und Rankine. Die Gleichungen 2 auf S. 131 waren nicht verwendbar, weil für die Durchbiegung f ein einfacher Werth nicht gefunden werden konnte. In gewissem Grade kann dieser Mangel mit Hülfe der Euler'schen Formel gehoben werden. Letztere wurde entwickelt unter alleiniger Berücksichtigung der Biegungsmomente. Lässt man dementsprechend auch in Gl. 2, S. 131 die reine Druckspannung P/F fort, so wird $\sigma'' = \frac{Pfe''}{J}$ oder $P = \frac{J\sigma''}{fe''}$, während nach der Euler'schen Formel $P = \frac{EJ\pi^2}{l^2}$. Da letzterer Werth aber die zerknickende Kraft bedeutet, sich also auf die Grenze der Festigkeit bezieht, so werden die beiden letzteren Werthe von

P gleichbedeutend, wenn für σ'' die Druckfestigkeit des betreffenden Stoffes gesetzt wird. Die Gleichung liefert dann

$$fe'' = \left(\frac{\sigma''}{E\pi^2}\right) l^2 .$$

In diese Gleichung die Ziffern für Druckfestigkeit und Elasticitäts-Ziffer thatsächlich einzuführen, empfiehlt sich allerdings nicht, denn die Gl. 2 S. 131 gilt nur innerhalb der Elasticitätsgrenze. Vielmehr setze man einfach

$$fe'' = \alpha l^2,$$

worin nun α eine von dem betreffenden Stoffe abhängige Zahl bedeutet, die aus der Erfahrung bestimmt werden möge. Mit $fe'' = \alpha l^2$ wird dann aus Gl. 2, S. 131

$$10) \qquad \sigma'' = \frac{P}{F}\left(\alpha \frac{l^2 F}{J} + 1\right) = \frac{P}{F}\left(\alpha \frac{l^2}{i^2} + 1\right),$$

wenn i der kleinste Trägheitshalbmesser des Querschnitts ist.

Für Schmiedeisen kann $\alpha = \frac{1}{10000}$,

für Gusseisen und Holz $\alpha = \frac{1}{5000}$

gesetzt werden. Will man nach Gl. 10 die Tragfähigkeit P berechnen, so hat man für σ'' die zulässige Druck-Anstrengung zu setzen.

Prof. Schwarz (in Hannover und Berlin) und Prof. Rankine (Glasgow) haben, unabhängig von einander, die Formel 10 aufgestellt. Sowohl diese wie die Euler'sche Formel sind nur als Nothbehelfe zu bezeichnen, was nach der Art der Herleitung nicht überraschen kann. (Vgl. die Schlussbemerkung auf S. 142.)

Verschiedene Fälle der Inanspruchnahme auf Zerknicken. In den vorstehenden Entwickelungen wurde vorausgesetzt, dass die Druckkräfte P genau in den Schwerpunkten der Endflächen angriffen, so dass an diesen Stellen das Moment Null war. In der Wirklichkeit wird dies annähernd zutreffen, wenn die Uebertragung der Druckkräfte auf den Stab mit Hülfe von Spitzen, Gelenken oder wenigstens abgerundeten Endflächen erfolgt, die dem Stabe eine bestimmte Richtung seiner Enden nicht aufzwingen.

Ein solcher Stab (Fig. 121) wird in seiner Mitte zu der ursprünglichen Achsenrichtung parallel bleiben, sich also in seiner einen (oberen) Hälfte ebenso verhalten wie ein an dem einen (unteren) Ende fest eingespannter oder mit breiter Fläche unterstützter Stab, der am anderen (oberen) freien Ende belastet ist. Bei einem Stabe letzterer Art von der freien Länge l_1 darf mithin zur Berechnung der Tragfähigkeit nicht diese Länge l_1 für l in die Formeln 9 und 10 eingeführt werden, sondern es ist in jenen Gleichungen $l = 2\,l_1$ zu setzen, so dass beispielsweise nach Euler die zerknickende Kraft $P_1 = \frac{EJ\pi^2}{4\,l_1^2}$ sein würde.

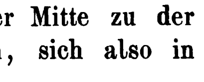
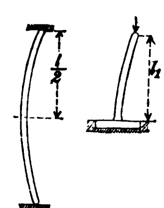
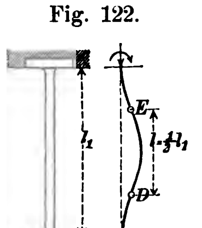


Fig. 121.



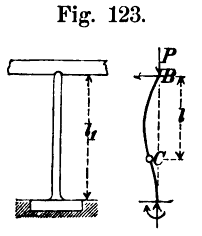
Ist der Stab von der Länge l_1 aber an beiden Enden fest eingespannt oder mit breiten Flächen aufgelagert (Fig. 122), so ist eine seitliche Ausbiegung nur mittels (wenigstens) zweier Wendepunkte D und E in der Biegungslinie möglich. Eine solche Linie findet sich aber in der Wellenlinie der Gleichung $y = f \sin {}^{x}/_{r}$ bereits vor: das Mittelstück DE zwischen den Wendepunkten entspricht einer halben Wellenlänge, während AD und BE je ein Viertel Wellenlänge darstellen. Da nun die Gl. 9 und 10 sich auf den Grundfall beziehen, wo der Stab sich nach einer halben Welle biegt, so ist $l = {}^1/_2\, l_1$ in die Formeln einzusetzen. Die zerknickende Kraft würde $P_1 = 4\,EJ\frac{\pi^2}{l^2}$ sein; dieser Fall ist daher günstiger als der Grundfall.

Fig. 122.



Ist der Stab an dem einen (unteren) Ende eingespannt, an dem anderen aber so gehalten, dass er hier eine beliebige Neigung annehmen, sich aber nicht aus der ursprünglichen Achse entfernen kann (Fig. 123), so ist zu dieser Führung eine besondere seitliche Kraft erforderlich. Die Biegung erfordert mindestens einen Wendepunkt C. Man kann diesen Fall in ähnlicher Weise besonders entwickeln wie den Grundfall (s. Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2. Aufl., S. 166; Winkler,

Fig. 123.



Lehre von der Elasticität und Festigkeit, S. 181), doch wollen wir uns hier darauf beschränken, das Ergebnis anzuführen, dass die zerknickende Kraft etwa

$$P_1 = 2\,E\,J\,\frac{\pi^2}{l_1^2}$$

wird. Man kann hiernach auch auf diesen Fall die Grundformeln 9 und 10 anwenden, nur muss als Grundlänge l die Strecke $BC = \frac{l_1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,l_1$ eingeführt werden. (Der Wendepunkt C liegt etwas tiefer als der untere Drittelspunkt.) Die Tragfähigkeit ist in diesem Falle doppelt so grofs wie in dem Grundfalle.

Häufig passen die gegebenen Umstände eines gedrückten Stabes auf keinen der besprochenen Fälle mit genügender Genauigkeit. Stützt sich z. B. ein Stab von der Länge l_1 mit eben bearbeiteten Enden gegen feste Flächen, so sind die Enden weder ganz frei, noch auch als unwandelbar eingespannt zu betrachten. Es wird also die Grundlänge zwischen den beiden Wendepunkten $l > {}^1/_2\,l_1$, aber auch $l < l_1$ sein. In solchen und anderen nicht ganz sicheren Fällen ist es rathsam, mit der ungünstigeren Annahme $l = l_1$ zu rechnen und die (vielleicht) günstige Wirkung der ebenen Endflächen lieber zu vernachlässigen.

Ist ein Stab nach allen Richtungen in gleichem Mafse frei oder in gleichem Mafse fest eingespannt, so kommt nur das k l e i n s t e Trägheitsmoment des Querschnittes für die Widerstandsfähigkeit gegen Zerknicken in Frage. In solchen Fällen sind diejenigen Querschnittsformen vortheilhaft, für welche die Central-Ellipse ein Kreis wird (s. S. 27); es ist dann nach allen Richtungen gleiche Steifigkeit vorhanden; eine Vergröfserung der Steifigkeit nach nur einer Richtung wäre offenbar unzweckmäfsig. Kreis, Quadrat, Kreisring, hohles Quadrat, kreuzförmiger Querschnitt u. dgl. ergeben sich hiernach als geeignete Querschnittsformen.

B e i s p i e l: Eine gusseiserne Säule von 5 m Höhe soll mit 60 000 kg belastet werden. Der Querschnitt sei ein Kreisring, die zulässige Druckanstrengung 700 at. Die Säule soll unten mit ebener Fläche aufruhen, oben drehbar, aber durch Gebälk in ihrer Achsenrichtung geführt sein. Man würde demnach hier als Grundlänge nur $l = \frac{500}{\sqrt{2}}$ zu rechnen brauchen, doch soll auf diesen günstigen Einfluss keine Rücksicht genommen, vielmehr $l = 500$ cm angenommen werden.

Sind D und d der äufsere und innere Durchmesser, so ist

$$J=(D^4-d^4)\frac{\pi}{64}; \quad F=(D^2-d^2)\frac{\pi}{4}; \quad i^2=\frac{J}{F}=\frac{D^2+d^2}{16}.$$

Benutzen wir zunächst die Euler'sche Formel und nehmen nach S. 135 6fache Sicherheit an, so ist als zerknickende Kraft $P_1=6\cdot 60\,000$ zu nehmen, und man erhält $6\cdot 60\,000=1\,000\,000\cdot\frac{(D^4-d^4)\pi}{64}\frac{\pi^2}{500^2}$. Mittels dieser Gleichung kann selbstverständlich nur eine Unbekannte bestimmt werden. Wir nehmen daher willkürlich etwa $D={}^1/_{20}\,l=25^{\text{cm}}$ an und lösen die Gleichung nach d auf, was $d=21{,}3^{\text{cm}}$ ergiebt. Daraus erhält man den Querschnitt $F=135^{\text{qcm}}$ und $\frac{P}{F}=\frac{60\,000}{135}=444^{\text{at}}$. Da diese Druckspannung unterhalb der zulässigen liegt, so kann das berechnete Mafs von d benutzt werden.

Rechnen wir nun zum Vergleiche mit der Schwarz-Rankine'schen Formel, so wird $700=\frac{60\,000}{(D^2-d^2)\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{5000}\frac{500^2\cdot 16}{(D^2+d^2)}+1\right)$. Legt man auch hier $D=25^{\text{cm}}$ zu Grunde, so liefert die Gleichung $d=20{,}8^{\text{cm}}$. Rundet man auf ganze Centimeter ab, so stimmen die Ergebnisse beider Rechnungen mit $d=21^{\text{cm}}$, mithin 2^{cm} Wandstärke, überein.

II. Excentrische Druckbelastung.

Ein prismatischer Stab möge an beiden Enden von Druckkräften ergriffen werden, die, parallel zur Achse des Stabes wirkend, nicht durch den Schwerpunkt der Endflächen hindurchgehen, sondern um c excentrisch liegen. Dann lässt sich (im Gegensatze zur centrischen Belastung) die Durchbiegung des Stabes und auch die Anstrengung desselben leicht berechnen.

Zunächst möge die vereinfachende Voraussetzung gemacht werden, dass die Angriffspunkte der Druckkräfte in (einander entsprechenden) Schwerpunkts-Hauptachsen der End-Querschnitte liege. Die Durchbiegung wird dann in der Richtung dieser Hauptachse erfolgen, und die Biegungsachsen werden überall rechtwinklig zu jenen Hauptachsen stehen, also ebenfalls Hauptachsen seien.

Legt man die X-Achse in die Richtung der Druckkräfte P, die Y-Achse (in der Biegungsebene) durch den Schwerpunkt A der einen Endfläche (Fig. 124) und bezeichnet die Koordinaten eines Punktes M der Biegungslinie mit x und y, so ist für den Querschnitt bei M wiederum die um y vom Schwerpunkte abweichende

Druckkraft P die einzige äufsere Kraft am unteren Stabtheile. Es gelten daher für die Spannungs- und Krümmungs-Verhältnisse bei M dieselben Gleichungen wie bei centrischer Belastung. An der konkaven Seite ist die Druckspannung

Fig. 124.

1) $$\sigma'' = \frac{P}{F}\left(\frac{F y e''}{J} + 1\right),$$

an der konvexen Seite die Zugspannung

2) $$\sigma' = \frac{P}{F}\left(\frac{F y e'}{J} - 1\right).$$

Im Schwerpunkte jedes Querschnittes herrscht die einfache Druckspannung $\frac{P}{F}$. Die Nulllinie liegt um v vom Schwerpunkte entfernt, u. zw. auf der Gegenseite der Druckkraft P, und es ist nach Gl. 1, S. 131

3) $$v = \frac{J}{F y} = \frac{i^2}{y}; \quad v y = i^2.$$

Ist f die Durchbiegung des Stabes in der Mitte, so ist der gröfste Werth von y hier $f + c$; die stärksten Spannungen am Stabe werden daher

4) $$\sigma'' = \frac{P}{F}\left(\frac{F(f+c)e''}{J} + 1\right) \quad \text{und}$$

5) $$\sigma' = \frac{P}{F}\left(\frac{F(f+c)e'}{J} - 1\right),$$

worin $f + c$ noch zu berechnen ist.

Für die Biegungslinie gilt auch hier die Grundgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{P}{E J} y = -\frac{y}{r^2}$$

mit der Lösung

$$y = A \sin\frac{x}{r} + B \cos\frac{x}{r}.$$

Für $x = 0$ ist $y = c$; dies bedingt $B = c$. Für $x = l$ ist wiederum $y = c$, also

$$c = A \sin\frac{l}{r} + c \cos\frac{l}{r}, \quad \text{oder}$$

$$A = c\,\frac{1 - \cos\frac{l}{r}}{\sin\frac{l}{r}} = c \operatorname{tg}\frac{l}{2r}.$$

Hiermit ist die Gleichung der Biegungslinie bestimmt zu

6) $$y = c\left(\operatorname{tg}\frac{l}{2r}\sin\frac{x}{r} + \cos\frac{x}{r}\right).$$

Für $x = \frac{l}{2}$ erhält man

$$f + c = c\left(\operatorname{tg}\frac{l}{2r}\sin\frac{l}{2r} + \cos\frac{l}{2r}\right),$$

was sich zu

7) $$f + c = \frac{c}{\cos\frac{l}{2r}}$$

zusammenzieht. Für $\cos\frac{l}{2r} = \cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ}}$ können in den meisten Fällen mit genügender Annäherung die beiden ersten Glieder der Cosinus-Reihe

8) $$\cos\frac{l}{2r} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)^2 = 1 - \frac{l^2}{8}\frac{P}{EJ}$$

gesetzt werden.

Beispiel: Eine hölzerne Säule von 500 cm Länge und von quadratischem Querschnitte 25 × 25 cm sei (an beiden Enden) mit 10 000 kg belastet, u. zw. greifen die Kräfte in den Mitten der Seiten der Stirnenden an, so dass $c = 12{,}5$ cm (Fig. 125).

Fig. 125.

Es ist $\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \sqrt{\frac{10000 \cdot 12}{120000 \cdot 25^4}} = \frac{1}{625}$;

$$\cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{250}{625} = \cos 0{,}4 = \cos\frac{0{,}4 \cdot 180}{\pi} = \cos 23^0 = 0{,}921.$$

(Die Annäherungs-Formel $1 - \frac{l^2}{8}\frac{P}{EJ}$ liefert dafür 0,920, also fast dasselbe.) Hiernach wird (Gl. 7) $f + c = \frac{c}{0{,}921} = 13{,}6$ cm, die Durchbiegung beträgt also $f = 1{,}1$ cm. Für die stärksten Spannungen ergiebt sich:

$$\sigma'' = \frac{10\,000}{25^2}\left(\frac{12 \cdot 12{,}5 \cdot 12{,}5}{25^2 \cdot 0{,}921} + 1\right) = 16\,(3{,}26 + 1) = 68^{\text{at}};$$

$$\sigma' = 16\,(3{,}26 - 1) = 36^{\text{at}} \text{ (Zug)}.$$

In den wichtigeren Fällen der Anwendung entsprechen den zulässigen Spannungen fast immer nur kleine Biegungen f. Ist nun die Excentricität c grofs im Verhältnisse zu der Durchbiegung f, so wird man zur Vereinfachung der Rechnung f gegen c gewöhnlich vernachlässigen und für alle Querschnitte die Biegungsspannungen nach dem Momente Pc (anstatt Py) berechnen dürfen.

Man vernachlässigt dann freilich die Vergrösserung, welche das Moment durch die Ausbiegung erfährt, erhält aber weit einfachere Formeln, nämlich

$$9)\quad \begin{cases} \sigma'' = \frac{P}{F}\left(\frac{Fce''}{J}+1\right) = \frac{P}{F}\left(\frac{ce''}{i^2}+1\right) \quad \text{und} \\ \sigma' = \frac{P}{F}\left(\frac{Fce'}{J}-1\right) = \frac{P}{F}\left(\frac{ce'}{i^2}-1\right). \end{cases}$$

In den vorstehenden Beispielen wird man hiernach

$$\sigma'' = \frac{10\,000}{25^2}\left(\frac{12 \cdot 12{,}5 \cdot 12{,}5}{25^2}+1\right) = 16\,(3+1) = 64^{\text{at}},$$

$\sigma' = 16\,(3-1) = 32^{\text{at}}$ erhalten.

Setzt man in Gl. 7 die Excentricität $c = 0$, so wird $f = \frac{0}{\cos\frac{l}{2r}}$; ist daher der Nenner grösser als Null, so wird auch $f = 0$. Ist aber auch der Nenner gleich Null oder $\frac{l}{2r} = \frac{\pi}{2}$ oder $P = EJ\frac{\pi^2}{l^2}$, so ergiebt sich, wie bei der früheren Untersuchung der centrischen Belastung, $f = \frac{0}{0}$, also unbestimmt.

In solchen Fällen, wo eine planmäfsige Excentricität nicht vorliegt, und wo man vielleicht geneigt sein könnte, ohne Weiteres die Formeln der Knickfestigkeit anzuwenden, empfiehlt sich die Erwägung, ob man nicht aus den äufseren Umständen doch eine wenigstens wahrscheinliche Excentricität herleiten könne, um eine sicherere Grundlage für die Rechnung zu gewinnen. In manchen Fällen dürfte dies gelingen.

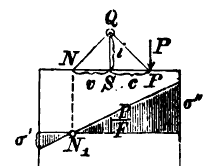
Die Schwarz-Rankine'sche Formel (S. 136, Gl. 10) rechnet mit einer willkürlich angenommenen Durchbiegung $f = \frac{\alpha l^2}{e''}$. Würde bei kleiner gegebener Excentricität $f + c < \frac{\alpha l^2}{e''}$ sich ergeben, so hätte man den Stab auf einfaches Zerknicken zu berechnen, weil die unbeabsichtigte, zufällige Excentricität gröfser als die gegebene anzunehmen wäre.

Für obiges Beispiel ist $\frac{\alpha l^2}{e''} = \frac{1}{5000}\,\frac{500^2}{12{,}5} = 4^{\text{cm}}$; kleiner als dieses Mafs würde demnach $f + c$ auch bei sehr kleiner gegebener Excentricität nicht in Gl. 4, S. 140 einzusetzen sein.

III. Excentrische Druckbelastung mit Vernachlässigung der Biegung.

Bei Vernachlässigung der Biegung ist die Excentricität der Druckkraft P für alle Querschnitte dieselbe, nämlich c. Der Abstand der Nulllinie vom Schwerpunkte des Querschnitts ist dann ebenfalls für alle Schnitte derselbe, nämlich (nach Gl. 3, S. 140).

Fig. 126.

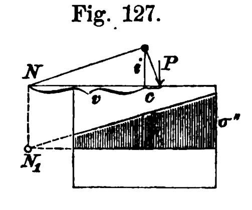


1) $$v = \frac{J}{Fc} = \frac{i^2}{c},$$

wenn i der in Frage kommende Trägheitshalbmesser ist. Um v zu konstruiren, trage man (Fig. 126) $SQ = i$ auf, ziehe PQ (wenn P den Angriffspunkt der Druckkraft) und dazu rechtwinklig QN, so ist $SN = v$. Die Spannungsvertheilung für einen Schnitt kann man nun, wenn P die einzige äufsere Kraft oberhalb des Schnittes ist, leicht konstruiren, indem man im Schwerpunkte desselben die dort herrschende Spannung $P/_F$ aufträgt und durch den Endpunkt dieser Auftragung sowie durch die Nulllinie N_1 des Schnittes eine Ebene legt. Diese Ebene und der Schnitt fassen dann zwischen sich den sog. Spannungskeil, die Darstellung der Normalspannungen an allen Stellen des Schnittes.

Der Punkt, in welchem die Druckkraft P eine Schnittebene schneidet, ist auch ein Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft der inneren Spannungen und wird daher der Spannungs-Mittelpunkt genannt. In Figur 126 sind die Punkte P und N völlig mit einander vertauschbar: Geht die Druckkraft durch N, so liegen die Nulllinien in dem Abstande PS von den Schwerpunkten der Schnittebenen.

Fig. 127.



Nach Gl. 1 wird für $c = 0$: $v = \infty$, d. h. die beiden Begrenzungs-Ebenen des Spannungskeiles schneiden sich in unendlicher Ferne, die Spannung wird (selbstverständlich) überall $= P/_F$. Wird nun c allmählich gröfser, so rückt die Nulllinie näher an den Körper heran, bleibt aber einstweilen noch aufserhalb desselben, so dass Zugspannungen in dem Körper noch nicht auftreten, σ' vielmehr negativ wird (Fig. 127). Bei einem

gewissen Werthe aber von e, der k' genannt werden möge, berührt die Nulllinie den Querschnitt (Fig. 128), es ist dann $v = e'$, mithin

$$k' = \frac{i^2}{e'} \tag{2}$$

Fig. 128.

(leicht zu konstruiren). Bei dieser Excentricität $c = k'$ wird $\sigma' = 0$.

Setzt man im Anschlusse an Gl. 2 auch $\frac{i^2}{e''} = k''$ oder

$$k'' = \frac{i^2}{e''}, \tag{3}$$

so gestattet die Einführung dieser Werthe k' und k'' eine erhebliche Vereinfachung der Formeln 9, S. 142, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} \sigma'' &= \frac{P}{F}\left(\frac{c}{k''} + 1\right) \\ \sigma' &= \frac{P}{F}\left(\frac{c}{k'} - 1\right). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Für den häufigen Fall, dass

$$e' = e'' = e, \quad \text{wird} \quad k' = k'' = k = \frac{i^2}{e}.$$

Bei dieser besonderen Excentricität k wird an der einen Seite des Körpers die Spannung $\sigma' = 0$, während die stärkste Druckspannung an der anderen Seite des Körpers $\sigma'' = 2\,\frac{P}{F}$ wird, d. h. doppelt so grofs wie bei c e n t r i s c h e r Belastung.

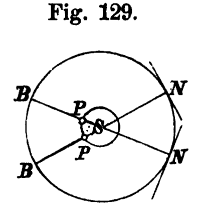
Wird dann bei weiterer Verschiebung der Druckkraft P die Excentricität $c > k'$, so rückt nun die Nulllinie in den Körper hinein (wie in Fig. 126), und es entstehen auf der einen Seite derselben wirkliche Zugspannungen σ'.

Die Bedeutung dieser Werthe k tritt besonders klar hervor, wenn man zunächst einmal einen k r e i s f ö r m i g e n Querschnitt annimmt. Es ist dann nicht allein jeder Durchmesser eine Schwerpunkts-Hauptachse, sondern es wird auch für alle Biegungsrichtungen übereinstimmend

$$k = \frac{\frac{d^2}{16}}{\frac{d}{2}} = \frac{d}{8}.$$

Zeichnet man mit diesem Halbmesser k einen koncentrischen Kreis, so wird, wenn der Spannungsmittelpunkt P an irgend einer Stelle des kleinen Kreises liegt (Fig. 129) die zugehörige Nulllinie eine zu dem Durchmesser PS rechtwinklige Tangente an den größeren Kreis sein. Die Spannung ist proportional dem Abstande von dieser Nulllinie, ist bei N gleich Null, beträgt in dem Abstande $= {}^1\!/_2\, d$ von derselben $P/_F$, im Punkte B aber $2\, P/_F$.

Fig. 129.



Bewegt sich nun der Spannungs-Mittelpunkt P auf dem Umfange des kleinen Kreises, so wird die Nulllinie sich ebenfalls bewegen, aber stets die gegebene Kreisfläche berühren, sie also umhüllen.

Der Kreis vom Halbmesser k heißt der Kern der gegebenen Figur. Liegt der Spannungsmittelpunkt P innerhalb des Kernes (ist $c < k$), so wird

$$v = \frac{i^2}{c} = e\,\frac{k}{c} > e,$$

d. h. die Nulllinie liegt außerhalb des Querschnitts, und alle Theile des letzteren erhalten übereinstimmend Druckspannung (es ist $\sigma' = P/_F\, [c/_k - 1]$ negativ); liegt der Spannungsmittelpunkt außerhalb des Kernes (ist $c > k$), so durchschneidet die Nulllinie den Querschnitt; derjenige Abschnitt, in welchem der Schwerpunkt sich befindet, bekommt dann Druckspannung, der andere aber Zugspannung. Bewegt sich der Spannungsmittelpunkt auf dem Umfange des Kernes, so umhüllt die Nulllinie den Querschnitt.

Ist der Querschnitt ein Kreisring von den Durchmessern D und d, so gelten die vorstehenden Erwägungen ebenfalls. Es ist hier aber

$$i^2 = \frac{1}{16}\,(D^2 + d^2), \quad e = {}^1\!/_2\, D,$$

also $k = \frac{D}{8}\left(1 + \frac{d^2}{D^2}\right)$; ändert sich d von 0 bis D, so vergrößert sich k von ${}^1\!/_8\, D$ bis ${}^1\!/_4\, D$. Für $d/_D = 0{,}8$ z. B. wird $k = 0{,}205\, D$. Ein Kreis vom Halbmesser k stellt den Kern des ringförmigen Querschnittes dar.

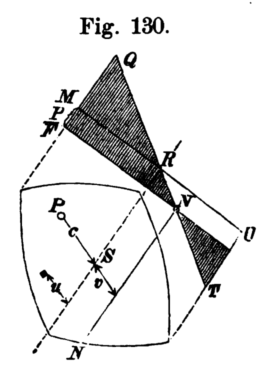
Bei anderen Figuren, bei denen nicht jeder Durchmesser eine Hauptachse ist, sind diese Verhältnisse verwickelter; es lässt sich aber zeigen, dass auch dann immer ein Kern mit denselben allgemeinen Eigenschaften gefunden werden kann, innerhalb dessen der Spannungsmittelpunkt bleiben muss, wenn Zugspannungen nicht auftreten sollen. Unter dieser Voraussetzung würde in dem Spannungszustande des Körpers dadurch nichts geändert werden, dass man denselben etwa durch beliebige Trennungsebenen (rechtwinklig zur Druckkraft) in einzelne, nicht zusammenhängende Schichten zerlegt, weil eben an diesen Trennungsebenen nur Druckspannungen zu übertragen sind. Hierin liegt gerade die wichtige Bedeutung der Kernfigur.

Zu ihrer Bestimmung ist aber die Kenntnis der gegenseitigen Beziehungen zwischen der Nulllinie und dem beliebig (also auch aufserhalb der Hauptachsen) gelegenen Spannungsmittelpunkte erforderlich.

IV. Allgemeine Beziehungen zwischen der Nulllinie und dem Spannungs-Mittelpunkte.

Wirkt im Punkte P, um c vom Schwerpunkte S des Querschnittes entfernt, eine Druckkraft P, so kann dieselbe in eine centrische Druckkraft P und ein Kräftepaar Pc zerlegt werden. Erstere liefert eine gleichmäfsige Druckspannung $P/_F$; dem Kräftepaare entspricht nach S. 31 eine Nulllinie SR (Fig. 130), welche durch den Schwerpunkt geht und zu SP konjugirt ist (in Bezug auf die Central-Ellipse des Querschnitts). Danach ergiebt sich der dem Kräftepaare entsprechende Spannungskeil $MQRTU$. Durch Hinzufügung der gleichmäfsigen Druckspannung $P/_F$ verschiebt sich dann die Nulllinie parallel nach NN um die Strecke v, wobei v nicht rechtwinklig zu SR, sondern in der Richtung von c gedacht ist. In einem Abstande u von SR (ebenfalls

Fig. 130.



parallel c gemessen) betrage die Druckspannung σ, dann liefert die Momentengleichung in Bezug auf SR:

$$Pc = \int \sigma \cdot dFu.$$

Da aber die Spannung σ in gleichem Verhältnisse mit dem Abstande von der Nulllinie NN wächst, und da im Schwerpunkte die Spannung $P/_F$ herrscht, so wird

$$\frac{\sigma}{P/_F} = \frac{u+v}{v} \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{P}{F}\left(\frac{u}{v}+1\right),$$

mithin nach vorstehender Gleichung

$$Pc = \frac{P}{Fv}\int dFu^2 + \frac{P}{F}\int dFu.$$

Nach S. 28 ist aber $\int dFu^2 = FA^2$, wenn A der Halbmesser der Central-Ellipse in der Richtung SP; da nun ferner $\int dFu = 0$, so wird

1) $$cv = A^2$$

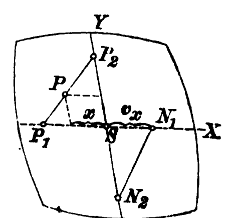
(als Verallgemeinerung der Gl. 1, S. 143). Auch wird

2) $$\sigma = \frac{P}{F}\left(\frac{uc}{A^2}+1\right).$$

Nach Gleichung 1 würde sich die zu dem Spannungsmittelpunkte P gehörige Nulllinie NN konstruiren lassen, wenn die Central-Ellipse scharf gezeichnet vorläge; da dies aber meist nicht der Fall ist, so muss man andere Verfahren zur Bestimmung der Nulllinie suchen.

Nehmen wir an, es seien die Richtungen SX und SY zweier konjugirten Halbmesser der Central-Ellipse gegeben, ebenso auch die Gröſsen B und A derselben (die in die Fig. 131 nicht eingetragen sind). Ist dann P ein beliebiger Spannungsmittelpunkt mit den (schiefwinkligen) Koordinaten x und y, so können die Punkte N_1 und N_2 konstruirt werden, in denen die zu P gehörige Nulllinie die SX und SY schneidet.

Fig. 131.



Man kann nämlich die Kraft P (rechtwinklig zur Bildebene) in zwei Parallelkräfte P_1 und P_2 zerlegen, die in P_1 und P_2 angreifen.

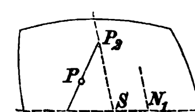
10*

Im Punkte N_1 erzeugt die Kraft P_1 (nach Gl. 2) eine Druckspannung
$$\frac{P_1}{F}\left(-\frac{SN_1 \cdot SP_1}{B^2}+1\right),$$
die Kraft P_2 eine Druckspannung $\frac{P_2}{F}$; die Mittelkraft P bringt daher in N_1 eine Druckspannung hervor, die sich aus den Beiträgen von P_1 und P_2 zusammensetzt, aber Null sein muss, wenn N_1 ein Punkt der Nulllinie sein soll; mithin wird
$$0=-\frac{P_1}{F}\frac{SN_1 \cdot SP_1}{B^2}+\frac{P_1}{F}+\frac{P_2}{F}.$$
Da aber $P_1+P_2=P$ und nach dem Gesetze der statischen Momente $P_1 \cdot SP_1 = P \cdot x$, so wird
$$\frac{Px \cdot SN_1}{B^2}=P \text{ oder, wenn } SN_1 = v_x,$$
$$3) \qquad \begin{cases} v_x \cdot x = B^2. & \text{Ebenso} \\ v_y \cdot y = A^2 & \text{in der anderen Achsenrichtung.} \end{cases}$$

Sind demnach die konjugirten Halbmesser B und A der Central-Ellipse in den Richtungen SX bezw. SY gegeben, so sind zu einem Spannungsmittelpunkte P mit den Koordinaten x und y leicht die Abschnitte $SN_1 = v_x$ und $SN_2 = v_y$ zu konstruiren. In den Gleichungen 3 ist v_x mit x und v_y mit y beliebig vertauschbar.

Wiederum sei die Druckkraft P in P_1 und P_2 zerlegt. Zu P_1 als Spannungsmittelpunkt gehöre (Fig. 132) die Nulllinie $N_1 N_1$ (wobei $SP_1 \cdot SN_1 = B^2$ sein muss), zu P_2 die Nulllinie $N_2 N_2$. Der Schnittpunkt D beider Nulllinien bekommt weder durch P_1 noch durch P_2 Spannung, ist mithin auch gegenüber der Kraft P spannungslos, daher ein Punkt der zum Mittelpunkte P gehörigen Nulllinie NN. Verschiebt sich nun P auf $P_1 P_2$, so ändert sich wohl das Verhältnis der Seitenkräfte P_1 und P_2, aber die Geraden $N_1 N_1$ und $N_2 N_2$ und also auch der Punkt D bleiben unverändert. D. h. während P sich auf $P_1 P_2$ verschiebt, dreht sich die entsprechende Nulllinie NN um den Punkt D. Nach der vorstehend mitgetheilten Konstruktionsweise würde aber zu D als Spannungsmittelpunkt

Fig. 132.



die Gerade $P_1 P_2$ als Nulllinie gehören; es ergiebt sich daher der Satz:

Während der Spannungsmittelpunkt P sich auf einer Geraden $P_1 P_2$ bewegt, dreht sich die entsprechende Nulllinie um denjenigen Punkt D, welcher der zu den Geraden $P_1 P_2$ als Nulllinie gehörige Spannungsmittelpunkt sein würde. Umgekehrt: Während die Nulllinie sich um einen Punkt D dreht, bewegt sich der entsprechende Spannungsmittelpunkt P auf derjenigen Geraden $P_1 P_2$, welche als Nulllinie zum Mittelpunkte D gehören würde.

Da es nach dem Früheren (S. 21 u. 28) immer möglich ist, für einen gegebenen Querschnitt die beiden Halbachsen a und b oder auch zwei konjugirte Halbmesser der Central-Ellipse zu finden, so kann man nach Vorstehendem auch für irgend einen Spannungsmittelpunkt die entsprechende Nulllinie zeichnen, und damit stehen dann auch die Spannungen σ an allen Stellen des Querschnittes fest, da sie proportional der Entfernung von der Nulllinie sind und da die Spannung im Schwerpunkte P/F bekannt ist.

V. Kern eines Querschnittes.

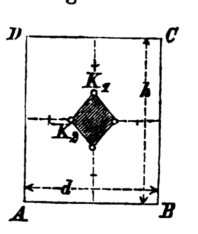
Lässt man einen Querschnitt von einer Geraden umhüllen und zeichnet zu jeder Lage dieser Geraden, als Nulllinie aufgefasst, den entsprechenden Spannungs-Mittelpunkt, so bilden diese letzteren sämmtlich Punkte des Kern-Umfanges. Ist der Querschnitt ein Vieleck, so muss die Nulllinie bei der Umhüllung sich um die Eckpunkte drehen, und gleichzeitig beschreibt dann der Spannungsmittelpunkt eine Gerade. Man braucht daher bei solcher Drehung der Nulllinie nur für Anfangs- und Endlage die Mittelpunkte zu bestimmen und diese durch eine Gerade zu verbinden. Jeder Ecke des Querschnittes entspricht demnach eine Seite des Kernes. Man kann auch zu einer Ecke des Querschnittes, als Spannungsmittelpunkt aufgefasst, die zugehörige Nulllinie bestimmen, so ist diese die entsprechende Kernseite.

Rechteck. Legt man die Nulllinie an AB, (Fig. 133), so kommt zur Bestimmung des Kernpunktes das Trägheitsmoment $J_1 = {}^1/_{12} F h^2$ also $i^2 = {}^1/_{12} h^2$ in Frage. Aus der allgemeinen

Formel Gl. 1, S. 143, $c \cdot v = i^2$ wird $k \cdot e = i^2 = {}^1/_{12}\, h^2$ und, weil $e = {}^1/_2$:

$$k = {}^1/_6\, h.$$

Fig. 133.



Der zu AB gehörige Kernpunkt K_1 liegt hiernach um ${}^1/_6\, h$ oberhalb des Schwerpunktes. Aus demselben Grunde liegt der zu BC gehörige Kernpunkt K_2 um ${}^1/_6\, d$ links vom Schwerpunkte. Die zu CD und DA gehörigen Kernpunkte müssen dann zu K_1 und K_2 symmetrisch liegen. Verbindet man diese 4 Kernpunkte durch gerade Linien, so erhält man als Kernfigur ein Rhombus, dessen Seiten den Diagonalen des Rechtecks parallel sind. Auf jeder der beiden Mittellinien des Rechtecks nimmt der Kern das mittlere Drittel ein. Für solche Fälle, in denen der Spannungsmittelpunkt nur auf einer der Mittellinien liegen kann, kommt daher auch nur dieses mittlere Drittel als Kernbreite in Frage.

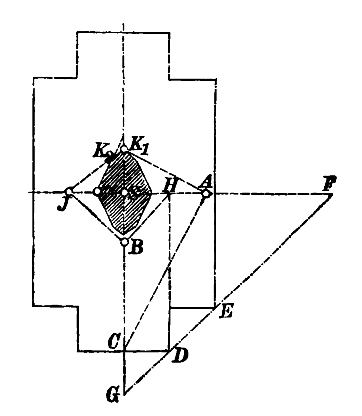
Fig. 134.

I-Querschnitt (Fig. 134). Auch bei diesem dreht sich die umhüllende Nulllinie um die 4 äufseren Eckpunkte, so dass der Kern ebenfalls ein Viereck wird. In dem Beispiele auf S. 27, Fig. 30 war $a^2 = 141$, $b^2 = 7{,}31$; daher wird

$$k_1 = \frac{a^2}{e_1} = \frac{141}{15} = 9{,}4, \quad k_2 = \frac{b^2}{e_2} = \frac{7{,}31}{6} = 1{,}22.$$

Das Auftragen von k_1 nach oben und unten, von k_2 nach links und rechts bestimmt die 4 Eckpunkte des rhombischen Kernes.

Fig. 135.

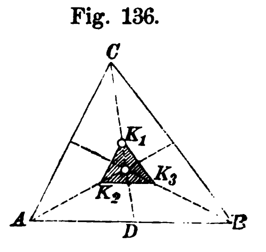


Querschnitt eines Mauerpfeilers (Fig. 135). Die Hauptträgheitshalbmesser können leicht berechnet werden. Letztere trage man nicht rechtwinklig zu den betreffenden Hauptachsen (wie sie in der Central-Ellipse liegen), sondern gegen diese Lage um 90° verdreht, d. h. auf den entsprechenden Achsen selbst auf, macht $SA = a$, $SB = b$, dann sind A und B für diese Konstruktion

Festpunkte. Die Nulllinie muss sich nun bei der Umhüllung der Figur um die 8 ausspringenden Eckpunkte drehen; daher wird der Kern ein Achtseit werden, von dem man wegen der symmetrischen Form der Figur nur 2 Seiten zu bestimmen braucht. Die auf den Hauptachsen liegenden Kernpunkte könnte man in derselben Weise bestimmen wie in den vorhergehenden Fällen. Dann könnte man durch die Ecken D und E eine Nulllinie legen, welche die Hauptachsen in F bezw. G schneidet; für diese beiden Punkte wären nach Gl. 3, S. 148 die Koordinaten x und y des der Nulllinie FG entsprechenden Kernpunktes K_2 zu bestimmen, indem man $SF = v_x$, $SG = v_y$ setzte und $x = \frac{b^2}{v_x}$ $y = \frac{a^2}{v_y}$ machte, was mittels der Festpunkte leicht zu konstruiren ist. In dem vorliegenden Falle ist es aber für die Zeichnung vortheilhafter, nach dem zweiten Theile des auf S. 149 bewiesenen Lehrsatzes die den Drehpunkten D und E entsprechenden Kernseiten festzulegen. Die Abscisse x des Punktes D ist SH; zieht man HB und dazu eine Winkelrechte BJ, so ist $SJ \cdot x = b^2$, daher J ein Punkt der Kernseite; zieht man dann CA und dazu winkelrecht AK_1, so ist K_1 ein zweiter Punkt, mithin JK_1 die zu D gehörige Seite. In derselben Weise findet man die Kernseite, welche dem Eckpunkte E entspricht.

Dreieck. Zieht man die Halbirungslinie CD (Fig. 136), so ist eine durch den Schwerpunkt gelegte Parallele zur Grundlinie AB die zu CD konjugirte Achse der Central-Ellipse, weil in Bezug auf diese beiden Achsen $\int dF xy = 0$ ist. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die zu AB parallele Schwerpunktsachse ist aber $J_x = {}^1/_{18}\, Fh^2$, und setzt man $CD = m$, so wird (vgl. S. 29) der Halbmesser der Central-Ellipse in der Richtung CD werden:

Fig. 136.



$A = \frac{m}{\sqrt{18}}$. Einer Nulllinie AB in dem (schiefen) Abstande $DS = {}^1/_3\, m$ vom Schwerpunkte entspricht daher ein auf CD gelegener Kernpunkt K_1 in dem Abstande

$$K_1 S = A^2 : {}^1/_3\, m = {}^1/_6\, m.$$

Die Strecke $K_1 D$ wird dann $(1/_6 + 1/_3)\,m = 1/_2\,m$, oder K_1 liegt in der Mitte von CD. Zugleich ist $K_1 S = 1/_4\,CS$. — Ebenso liegt K_2 in der Mitte der durch A gelegten Halbirungslinie, und das entsprechende gilt für K_3. Der Kern ist hiernach eine dem grofsen Dreieck ähnliche und ähnlich liegende Figur. Der Aehnlichkeitspunkt ist der Schwerpunkt. Die Abmessungen des Kerndreiecks betragen $1/_4$ von denen des grofsen. (Man hätte auch die zum Spannungsmittelpunkte C gehörige Nulllinie $K_2 K_3$ in dem (schiefen) Abstande $A^2 : \frac{2}{3}\,m = 1/_{12}\,m = 1/_4\,SD$ von S ermitteln können.)

VI. Verwendung des Kernes zur Bestimmung der stärksten Spannungen bei excentrischer Druckbelastung.

Die Druckspannung an beliebiger Stelle war nach Fig. 130 und Gl. 2, S. 147

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(\frac{uc}{A^2} + 1\right).$$

Fig. 137.

Nennt man e'' den Abstand der Stelle A (Fig. 137) der stärksten Druckspannung von der zu PS konjugirten Schwerpunktsachse SQ, so wird

$$\sigma'' = \frac{P}{F}\left(\frac{e''c}{A^2} + 1\right).$$

Verlängert man aber PS bis zum Schnitte K'' mit dem Kerne, so entspricht dem Punkte K'' als Spannungsmittelpunkte eine zu SQ parallele, den Querschnitt berührende Nulllinie, die offenbar durch den Punkt A der stärksten Spannung σ'' gehen muss. Es ist daher $SK'' \cdot e'' = A^2$, folglich $\frac{e''}{A^2} = \frac{1}{SK''}$. Setzt man den dem Spannungsmittelpunkte P abgewandten Kernhalbmesser $SK'' = k''$, so wird

$$1)\qquad \begin{cases} \sigma'' = \dfrac{P}{F}\left(\dfrac{c}{k''} + 1\right) & \text{und ebenso} \\[2ex] \sigma' = \dfrac{P}{F}\left(\dfrac{c}{k'} - 1\right), \end{cases}$$

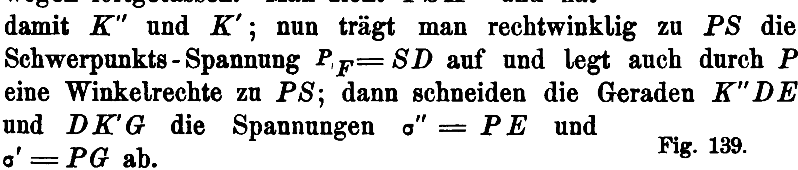
wenn k' den dem Spannungsmittelpunkte zugewandten Kernhalbmesser SK' bedeutet. Diese Gleichungen stimmen mit den Gl. 4, S. 144, welche für einen auf einer Hauptachse liegenden Spannungsmittelpunkt gelten, völlig überein.

Fig. 138.

Die Werthe σ'' und σ' lassen sich leicht konstruiren. Es ist nämlich

$$\frac{c}{k''} + 1 = \frac{c + k''}{k''} = \frac{PK''}{SK''}.$$

In Figur 138 ist nur der Kern dargestellt, der Umriss der Querschnittsfigur aber der Deutlichkeit wegen fortgelassen. Man zieht PSK'' und hat damit K'' und K'; nun trägt man rechtwinklig zu PS die Schwerpunkts-Spannung $P/F = SD$ auf und legt auch durch P eine Winkelrechte zu PS; dann schneiden die Geraden $K''DE$ und $DK'G$ die Spannungen $\sigma'' = PE$ und $\sigma' = PG$ ab.



Liegt P innerhalb des Kernes (Fig. 139), so fällt der Punkt G zwischen P und E, und es bedeutet nun PG die Druckspannung $-\sigma'$.

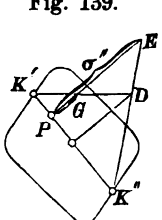


Fig. 139.

Hiernach kann man die stärksten Spannungen unmittelbar mittels des Kernes bestimmen, ohne die Stellen, an denen diese Spannungen auftreten, oder die Lage der Nulllinie aufsuchen zu müssen.

VII. Verwendung des Kernes zur Bestimmung der stärksten Spannungen bei der Biegung durch ein Kräftepaar.

Bilden die auf einen Querschnitt bezogenen äufseren Kräfte ein Kräftepaar vom Momente M, dessen Drehungsebene den Querschnitt in der Geraden PS (Fig. 140) schneidet, so kann man M auf 2 gleiche, entgegengesetzte Parallelkräfte P und P, in dem Punkte P bezw. im Schwerpunkte angreifend, zurückführen, so dass dann $M = Pc$ ist. Es fällt nun die auf S. 146 besprochene und in dem Spannungskeile (Fig. 130) dargestellte, gleichmäfsig vertheilte Druckspannung P/F fort, die Nulllinie geht durch den Schwerpunkt, die Spannung σ'' vermindert sich

Fig. 140.

um $P/_F$, während σ' um diese Gröfse zunimmt. In der Gl. 1, S. 152 fallen daher rechts die Summanden $+1$ und -1 fort, es wird

$$1)\qquad \begin{cases} \sigma'' = \dfrac{Pc}{Fk''} = \dfrac{M}{Fk''}, \\ \sigma' = \dfrac{Pc}{Fk'} = \dfrac{M}{Fk'}. \end{cases}$$

Wie für gerade Belastung (S. 144, Gl. 2 und 3) $k' = \dfrac{i^2}{e'} = \dfrac{J}{Fe'}$ war, also das Widerstandsmoment des Querschnittes $\dfrac{J}{e'} = Fk'$ geschrieben werden konnte, so bekommt nach vorstehender Gl. 1 $Fk''\left(= \dfrac{M}{\sigma''}\right)$ und ebenso Fk' auch bei schiefer Belastung die Bedeutung des Widerstandsmomentes des Querschnitts, welches nur mit σ'' bezw. σ' multiplicirt zu werden braucht, um Gröfsen, gleich dem Biegungsmomente M, zu liefern. *) Dreht sich die Ebene des Kräftepaares, dreht sich also auch PS um S, so ändern sich die in Frage kommenden Widerstandsmomente verhältnisgleich mit den Kernhalbmessern, die sich in den verschiedenen Richtungen ergeben. In den Richtungen der gröfsten und der kleinsten Kernhalbmesser liegen auch die Richtungen des gröfsten und des kleinsten Biegungswiderstandes.

Bei länglich rechteckigem Querschnitte (Fig. 141) ergiebt sich der kleinste Biegungswiderstand nicht in der Richtung der ersten Hauptachse (wie man wohl erwartet haben möchte), sondern in den Richtungen der beiden Winkelrechten zu den Kernseiten, welche mit der ersten Hauptachse je einen Winkel α einschliefsen, für den $\operatorname{tg} \alpha = d/_h$; diese Richtungen sind rechtwinklig zu den Diagonalen. Entsprechendes lässt sich aus den Figuren 134 und 135, S. 150 für andere Querschnittsformen ablesen.

Fig. 141.

Der Kern einer Querschnittsfigur bildet demnach ein vorzügliches Mittel zur Beantwortung verschiedener Fragen, die mit dem Biegungswiderstande eines Stabes zusammenhängen.

---

*) Vgl. W. Ritter, eine neue Festigkeitsformel; Civilingenieur 1876, S. 309. — Manderla, die direkte Abmessung des Widerstandsmoments am Centralkern eines Querschnittes; Allgemeine Bauzeitung 1882, S. 35.

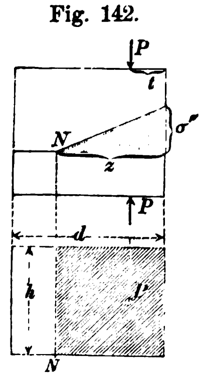
VIII. Wirkung von Druckkräften aufserhalb des Kernes auf Mauerkörper ohne Zugfestigkeit.

Liegt der Spannungsmittelpunkt eines Querschnittes aufserhalb des Kernes, so gelten die vorstehenden Rechnungen nur dann, wenn die Zugspannungen auf der einen Seite der Nulllinie von der Festigkeit des Körpers auch wirklich geleistet werden. Kann der Körper jene Zugspannungen aber nicht liefern, so ändert sich in Folge dessen die Spannungs-Vertheilung vollständig.

Bei Mauerwerk ist nun der Zusammenhang zwischen den einzelnen Steinen häufig so gering, dass auf etwaige Zugspannungen nicht mit Sicherheit gerechnet werden kann. Wir wollen daher jetzt annehmen, dass an einem Querschnitte nur Druckspannungen möglich seien und dass statt einer positiven elastischen Dehnung einfach eine Trennung, ein theilweises Oeffnen der Fugen eintrete. Derjenige Theil des Querschnitts, an welchem dies stattfindet (auf derjenigen Seite der Nulllinie, auf welcher der Spannungsmittelpunkt nicht liegt), kommt dann für die Spannungs-Vertheilung ganz aufser Betrachtung, und die auf die ganze Fläche bezüglichen Gröfsen F und J können hier keine Anwendung mehr finden. Aus dem Umstande, dass der in Wirksamkeit tretende Flächentheil zunächst unbekannt ist, erwachsen besondere Schwierigkeiten, so dass die meisten Fälle nur mittels Probierens behandelt werden können.

Sehr einfach ist der Fall, wo der Querschnitt ein Rechteck ist und der Spannungsmittelpunkt auf einer Schwerpunkts-Hauptachse desselben liegt; die Nulllinie muss dann offenbar rechtwinklig zu dieser Hauptachse sein. Da der Schwerpunkt der ganzen Querschnittsfläche für diese Fälle keine besondere Bedeutung mehr hat, so wird auch die Lage des Spannungsmittelpunktes P zweckmäfsig nicht mehr auf den Schwerpunkt bezogen, sondern durch die Entfernung t von der am stärksten gepressten Kante festgelegt (Fig. 142). Die Nulllinie liege in dem noch unbekannten Abstande z von derselben Kante.

Fig. 142.



Als wirksamer Querschnitt kommt jetzt allein das rechts von der Nulllinie NN befindliche Rechteck $z \cdot h$ in Frage; und

da die Nulllinie an der linksseitigen Grenze desselben liegt, so muss P der rechtsseitige Kernpunkt dieses Rechtecks sein; oder es wird $t = {}^1/_3\, z$, mithin

1) $$z = 3t.$$

Zugleich wird nach S. 144 die stärkste Druckspannung σ'' doppelt so grofs, wie bei gleichmäfsiger Vertheilung der Kraft P über den wirksamen Querschnitt, d. h. es ist

2) $$\sigma'' = 2\frac{P}{zh} = \frac{2}{3}\frac{P}{th}.$$

Diese Gleichung gilt aber nur dann, wenn die Kraft P aufserhalb des Kernes eines rechteckigen Mauerkörpers (oder Körpers ohne Zugfestigkeit) angreift; denn sie beruht darauf, dass die Querschnittsbreite $z = t$ Druckspannung erfährt. Läge der Spannungsmittelpunkt innerhalb des Kernes, so wäre $t > {}^1/_3\, d$, mithin die widerstehende Querschnittsbreite nach Gl. 1: $z > d$, was unmöglich ist. Die Formeln

$$\sigma'' = \frac{P}{F}\left(\frac{c}{k} + 1\right) = \frac{P}{dh}\left(\frac{6c}{d} + 1\right) \text{ für } c \leqq {}^1/_6\, d$$

$$\text{und } \sigma'' = \frac{2}{3}\frac{P}{th} \text{ für } t \leqq {}^1/_3\, d$$

ergänzen sich gegenseitig und schliefsen sich zugleich aus; nur für $c = {}^1/_6\, d$ oder $t = {}^1/_3\, d$ geben sie übereinstimmend $\sigma'' = 2\frac{P}{dh}$.

Wird der Abstand t von der am stärksten gepressten Kante kleiner, so nimmt die wirksame Querschnittsweite z dreimal so schnell ab, und die Spannung σ'' wächst sehr schnell.

Für	$t = {}^1/_3\, d$	${}^1/_6\, d$	${}^1/_9\, d$	0
wird	$z = d$	${}^1/_2\, d$	${}^1/_3\, d$	0
	$\sigma'' = 2\frac{P}{dh}$	$4\frac{P}{dh}$	$6\frac{P}{dh}$	∞.

Sobald die Kraft P sich einer Kante des Querschnittes nähert, wird hiernach die Zerstörung des Mauerkörpers ohne Zugfestigkeit eintreten müssen, während dagegen für $c = {}^1/_2\, d$ die stärkste Spannung σ'' nur $= 4\frac{P}{dh}$ wird, wenn der Körper eine Zugspannung $\sigma' = 2\frac{P}{dh}$ leisten kann.

Ist die Breite d des Körpers von rechteckigem Querschnitte veränderlich und wird sie daher besser mit x bezeichnet, während die andere Abmessung gleich Eins sein mag, wird aber der Spannungsmittel-

punkt in dem **unveränderlichen** Abstande t von der rechtsseitigen Kante gehalten (Fig. 143), so wird, wenn auch **Zugspannungen** möglich sind,

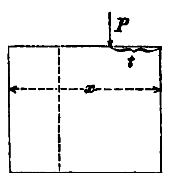


Fig. 143.

$$\sigma'' = \frac{P}{x}\left(\frac{6\left(\frac{x}{2}-t\right)}{x}+1\right) = \frac{P}{2t}\left(8\frac{t}{x}-12\frac{t^2}{x^2}\right).$$

Für $x = 3t$ wird σ'' am **größten**, nämlich (wie bekannt) $\sigma'' = \frac{2}{3}\frac{P}{t}$.

In Fig. 144 sind die Werthe $\frac{x}{t}$ als Abscissen, die Größen $\sigma'' : \frac{P}{2t}$ als Ordinaten aufgetragen; sie bestimmen die Kurve $EBCD$. Für $x/_t = 2$ wird $\sigma'' = \frac{P}{2t}$. Bei weiter abnehmendem x entsteht offenbar an der **linken** Seite die stärkere Spannung $-\sigma'$, welche durch die Gleichung

$$-\sigma' = \frac{P}{2t}\left(-4\frac{t}{x}+12\frac{t^2}{x^2}\right).$$

gegeben und durch die Kurve BF dargestellt ist.

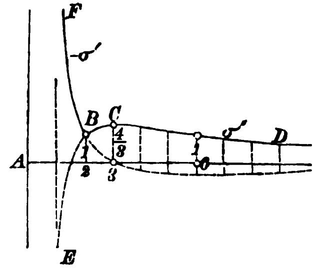


Fig. 144.

Geht man von dem ungünstigsten Falle $x = 3t$ aus und denkt sich dann das linksseitige Drittel des Körpers entfernt (Fig. 143), so ist mit dieser **Verkleinerung** des Rauminhaltes auf $^2/_3$ nicht eine **Vergrößerung**, sondern eine **Verminderung** der stärksten Spannung verbunden, nämlich von $\frac{4}{6}\frac{P}{t}$ auf $\frac{3}{6}\frac{P}{t}$, d. h. im Verhältnisse von 4 auf 3. Jenes fortgenommene Drittel des Körpers war also in diesem Falle geradezu schädlich. Man erkennt hieraus den Vortheil, der mit einer **centrischen** Lage des Spannungsmittelpunktes verbunden ist.

Für $x/_t > 3$ liegt P aufserhalb des Kernes. Der weitere Verlauf der Kurve rechts von C hat daher nur Bedeutung für Körper, die auch **Zug**widerstände leisten; für diese wird eine fernere Verbreiterung nach links wieder eine (freilich langsame) Verminderung der stärksten Spannung bewirken. Für Körper **ohne** Zugfestigkeit ist die Verbreiterung über $x = 3t$ hinaus ohne Einfluss auf die stärkste Spannung; das Kurvenstück CD würde daher durch die wagerechte Tangente an den Punkt C zu ersetzen sein.

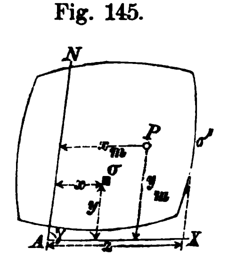
IX. Allgemeine Beziehungen zwischen dem Spannungsmittelpunkte und der Nulllinie bei Mauerkörpern, die aufserhalb des Kernes belastet sind.

Zu einer gegebenen oder angenommenen Nulllinie lässt sich der zugehörige Spannungsmittelpunkt immer berechnen (nur die

gewöhnlich umgekehrt vorliegende Aufgabe stöfst meist auf Schwierigkeiten und erfordert häufig das Vorgehen mittels Probirens).

AN sei die gegebene oder angenommene Nulllinie, der wirksame Querschnitt liege rechts davon (Fig. 145). Man wähle auf der Nulllinie einen beliebigen Anfangspunkt A und bestimme eine beliebige AX-Achse, welche mit AN den Winkel γ bilde. Die stärkste Druckspannung an der von der Nulllinie am weitesten entfernten Stelle sei σ'', und die Abscisse dieser Stelle sei z. Die Koordinaten des Spannungsmittelpunktes P seien x_m und y_m, die Spannung an einem beliebigen Punkte x, y sei σ, dann ist

Fig. 145.



$$1) \qquad \sigma = \frac{\sigma''}{z} x.$$

Es muss nun die Summe aller inneren Kräfte gleich P sein, d. h.

$$2) \qquad P = \frac{\sigma''}{z} \int dFx = \frac{\sigma''}{z} \frac{S}{\sin\gamma},$$

wenn S das statische Moment der wirksamen Fläche in Bezug auf die Nulllinie bedeutet, also $S = \int dFx \sin\gamma$ ist. Die Momentengleichung in Bezug auf die Nulllinie wird:

$$3) \qquad Px_m = \frac{\sigma''}{z} \int dFx^2 = \frac{\sigma''}{z} \frac{J}{\sin^2\gamma},$$

wenn J das Trägheitsmoment der wirksamen Fläche in Bezug auf die Nulllinie. Endlich liefert die Momentengleichung in Bezug auf die X-Achse:

$$4) \qquad Py_m = \frac{\sigma''}{z} \int dFxy.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$5) \qquad x_m = \frac{J}{S\sin\gamma},$$

$$6) \qquad y_m = \frac{\sin\gamma \int dFxy}{S},$$

$$7) \qquad \sigma'' = P\frac{z\sin\gamma}{S}.$$

Bei gewähltem Achsenkreuze sind γ, z, J, S und $\int dFxy$ bekannt oder zu berechnen, daher auch die Lage des Spannungsmittelpunktes und die stärkste Druckspannung zu ermitteln.

Lässt sich das Achsenkreuz so legen, dass $\int dFxy = 0$ wird, so wird nach Gl. 6 auch $y_m = 0$ und P liegt auf AX.

Ist AN eine Wasserspiegel-Linie und der wirksame Querschnitt dem Wasserdruck ausgesetzt, so bekommt P die Bedeutung des Mittelpunktes des Wasserdrucks.

Parabelfläche (Fig. 146). Ist der wirksame Querschnitt F eine gerade abgeschnittene Parabelfläche, so findet man leicht

$$J = \frac{8}{35} F z^2; \quad S = \frac{2}{3} F z, \quad \text{mithin}$$

$$x_m = \frac{4}{7} z \quad \text{und} \quad t = \frac{3}{7} z, \quad \text{oder}$$

$$z = \frac{7}{3} t = 2\,{}^1\!/_3\, t;$$

$$\sigma'' = \frac{5}{2} \frac{P}{F}.$$

Fig. 146.

Für eine schief abgeschnittene Parabelfläche sind die Ergebnisse entsprechend.

Halbkreis. Für diesen ist $J = {}^1\!/_4\, F r^2$; $S = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} F$, daher $x_m = {}^3\!/_{16}\, r\pi = 0{,}59\, r$; $t = 0{,}41\, r$ oder

$$z = 2{,}43\, t;$$

$$\sigma'' = 2{,}36 \frac{P}{F}.$$

Vollkreis. In diesem Falle ist $J = \frac{5}{4} F r^2$; $S = F r$, mithin $x_m = {}^5\!/_4\, r$; $t = {}^3\!/_4\, r = {}^3\!/_8\, z$, oder

$$z = 2\,{}^2\!/_3\, t$$

$$\sigma'' = 2 \frac{P}{F}.$$

Kreisabschnitt. Ist der wirksame Querschnitt ein Kreisabschnitt, so erhält man für J, S und z trigonometrische Funk-

tionen des halben Centriwinkels. Mit Rücksicht darauf, dass ein sehr kleiner Abschnitt als Parabelfläche betrachtet werden kann, lässt sich aus den vorstehenden, für Parabel, Halbkreis und Vollkreis gefundenen Ergebnissen die für die meisten Fälle genügende Annäherungs-Formel

$$\frac{z}{t} = 2{,}33 + 0{,}58 \left(\frac{t}{r}\right)^2$$

ableiten. Ist hiernach die Nulllinie gefunden, so bietet die Berechnung der stärksten Spannung keine Schwierigkeit, weil ja im Schwerpunkte der wirksamen Fläche F immer die mittlere Spannung P/F herrscht, die Spannung an anderen Stellen aber immer dem Abstande von der Nulllinie proportional ist. Uebrigens kann σ'' nach der Annäherungsformel

$$\sigma'' = 0{,}58 \frac{P}{t\sqrt{2rt}}$$

berechnet werden.

Die für den Vollkreis gefundene Formel $\sigma'' = 2\,P/F$ lässt sich nämlich in vorstehende Gestalt bringen; für den Halbkreis würde statt 0,58 nur 0,56 zu setzen sein, während für ganz kleine Abschnitte (die als Parabeln betrachtet werden können) 0,53 sich ergiebt. Rechnet man daher mit der Ziffer 0,58, so erhält man die Spannung im Allgemeinen etwas größer als sie ist, und zwar höchstens um $1/11$ zu groß.*)

Dreieck. Ist die wirksame Fläche F ein Dreieck, so wird die Beziehung für den Spannungsmittelpunkt sehr einfach. Ist A die Mitte der Nulllinie NN_1, so muss P auf der Halbirungslinie AB liegen, u. zw. nach der Lehre vom Kerne des Dreiecks (s. S. 151, Fig. 136) in der Mitte von AB. Bezeichnet man die in den Richtungen BN bezw. BN_1 gemessenen Koordinaten des Punktes P mit t und u, so findet man leicht $BN = 4t$ und $BN_1 = 4u$, wodurch bei gegebenem Mittelpunkte P die Nulllinie

Fig. 147.

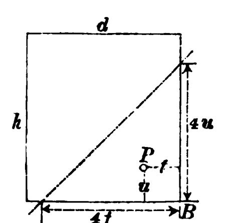
*) Für ringförmige Querschnitte wird die Berechnung derartiger Aufgaben durch Anwendung von Tabellen erleichtert; siehe: Keck, „Excentrische Druckbelastung außerhalb des Kernes bei Mauerwerkskörpern ringförmigen Querschnittes“; Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1882, S. 627. Die Tabellen sind dann weitergeführt von Heinemann a. a. O. 1891, S. 157.

NN_1 bestimmt ist. Da im Schwerpunkte S die Spannung $\frac{P}{F} = \frac{P}{8\,tu \sin\alpha}$, (wenn $\alpha = \measuredangle\, NBN_1$) so herrscht im Punkte B die dreimal so grofse Spannung

$$\sigma'' = \frac{3}{8}\,\frac{P}{tu \sin\alpha}.$$

Eine derartige dreieckige Wirkungsfläche kommt u. A. bei rechteckigen Querschnitten vor (Fig. 148), wenn der Spannungsmittelpunkt nahe an einer Ecke B liegt. Sind seine Koordinaten in Bezug auf diese Ecke t und u, so schneidet die Nulllinie auf den Rechteckseiten die Längen $4t$ bezw. $4u$ ab, wenn gleichzeitig

Fig. 148.



$$4t \leqq d \quad \text{und} \quad 4u \leqq h,$$

und es ist dann

$$\sigma'' = \frac{3}{8}\,\frac{P}{tu}.$$

Sind aber die Bedingungen $t \leqq {}^1/_4\, d$ und $u \leqq {}^1/_4\, h$ nicht erfüllt, so wird die wirksame Fläche nicht mehr ein einfaches Dreieck, sondern ein Viereck oder Fünfeck, und dann werden die Verhältnisse verwickelter.*)

In allen hierher gehörigen Fällen, wo die rechnerische Lösung Schwierigkeiten bietet, ist ein graphostatisches Verfahren zu empfehlen, dessen Entwickelung jedoch den Rahmen dieses Buches überschreitet.**)

X. Excentrische Zugbelastung.

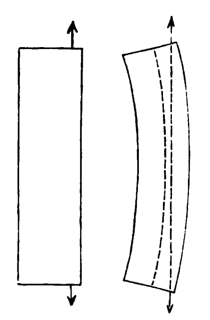
Wird ein prismatischer Stab durch excentrische Zugkräfte beansprucht, so erfährt die Excentricität des Spannungs-Mittelpunktes für irgend einen Querschnitt durch die Biegung des

*) Diese schwierigeren Fälle sind von Barkhausen behandelt worden in der Abhandlung: „Druckvertheilung im rechteckigen Mauerquerschnitt", Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover, 1883, S. 469.

**) Siehe Mohr, „Vertheilung exentrischer Druckbelastung eines Mauerkörpers"; Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1883, S. 163. — Hüppner, „Druckvertheilung in Mauerwerks-Querschnitten"; Civilingenieur 1885, S. 39. — Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl., S. 72.

Stabes nicht eine Vergrößerung (wie bei der Druckbelastung, S. 139), sondern eine Verkleinerung. Die stärksten Spannungen finden sich daher an den Endquerschnitten. Für die Ermittelung derselben gelten aber die Betrachtungen auf S. 143—153 ohne Weiteres, wenn nur die Worte Zug- und Druckspannung mit einander vertauscht werden (so dass σ'' die Zugspannung, σ' die Druckspannung bedeutet).

Fig. 149.



Auch die Untersuchungen über Druckkräfte außerhalb des Kernes bei Mauerwerkskörpern finden sinngemäße Anwendung bei der Zugwirkung an Körpern, in denen wohl Zugspannungen, nicht aber erhebliche Druckspannungen auftreten können. Solche Körper sind z. B.: Lederriemen, dünne Kautschuk- oder auch selbst Blechplatten, Papierblätter, Gewebe u. dgl. Bei derartigen Körpern wird eine Zugkraft außerhalb des Kernes nicht mehr den ganzen Querschnitt in Anspruch nehmen, sondern es wird auf der einen Seite (anstatt eines Druckwiderstandes) ein Falten eintreten (entsprechend dem Klaffen der Mauerfugen bei Druck). Man wird also für solche Fälle die Formeln auf S. 156—157 anwenden können. Rückt die Richtung der Zugkraft der einen Kante sehr nahe, so entsteht dort eine verhältnismäßig bedeutende Spannung; auf diesem Umstande beruht die Art und Weise, wie man mit den Händen ein Papierblatt zu zerreißen pflegt.



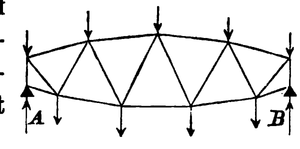
Neunter Abschnitt.

Einfache Fachwerkbalken auf 2 Stützen.

I. Voraussetzungen.

Ein gewöhnliches oder Dreiecks-Fachwerk ist eine Aneinanderreihung einzelner, aus Gelenkstäben gebildeten Dreiecke, von denen je 2 benachbarte eine Seite gemeinsam haben. Ein solches Fachwerk bildet, wenn man die Stäbe als starr voraussetzt, eine unveränderliche Figur und erleidet in Wirklichkeit (d. h. bei elastischen Stäben) nur elastische Formänderungen; man nennt solche Anordnung daher auch ein steifes Fachwerk. Legt man dasselbe in gleicher Weise, wie die weiter oben behandelten vollwandigen Balken, auf 2 Stützen, so entsteht ein einfacher Fachwerkbalken auf 2 Stützen, welcher lothrechten Lasten gegenüber standfest ist (Fig. 150).

Fig. 150.



Betrachtet man die einzelnen Stäbe zunächst als gewichtlos und greifen die sonstigen äufseren Kräfte nur in Gelenkpunkten (Knotenpunkten) an, so wird (unter Vernachlässigung der Reibung an den Gelenkbolzen) jeder Stab nur in der Richtung der Verbindungsgeraden seiner Gelenkpunkte einen Widerstand leisten können. Die Mittelkraft aller inneren Spannkräfte, die auf irgend einen Querschnitt eines solchen Stabes wirken, geht dann ebenfalls durch die beiden Gelenkpunkte hindurch und ist für alle Querschnitte desselben Stabes von gleicher Gröfse. Diese Mittelkraft werde nun einfach die Spannkraft des Stabes oder die Stabkraft genannt, u. zw. eine Zug- oder eine Druckkraft, je nachdem sie einer Vergröfserung oder einer Verkleinerung der Abstände der beiden Gelenkpunkte entgegenwirkt. Im Allgemeinen empfiehlt es sich, bei der Berechnung die Stabkräfte zunächst sämmtlich

als Zugkräfte einzuführen; ein positiver oder negativer Werth, der sich durch die Rechnung für die Stabkraft ergiebt, kennzeichnet dieselbe schliefslich als Zug- bezw. Druckkraft. In besonderen Fällen freilich, wo über das Vorzeichen einer Gruppe von Stabkräften kein Zweifel ist, wird man auf die Benutzung dieser Regel verzichten.

Fällt die Achse des Stabes mit der Verbindungsgeraden seiner Gelenkpunkte zusammen, so ist seine Anstrengung nach den Regeln über centrische Zug- oder Druckbelastung zu berechnen. Im anderen Falle kommt die excentrische Zug- oder Druckbelastung in Frage. Im Folgenden soll die Verbindungsgerade der beiden Gelenke eines Stabes durchweg als die Stabachse oder Stabrichtung aufgefasst werden.

Ist der Fachwerkbalken an zwei Gelenkpunkten unterstützt (Fig. 150) und sind die einzelnen Knotenpunkts-Belastungen gegeben, so müssen die Stützendrücke den sämmtlichen Lasten das Gleichgewicht halten; man hat daher die Auflagerdrücke A und B in derselben einfachen Weise zu ermitteln, wie bei einem vollwandigen Balken auf 2 Stützen, indem man für die Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen die (geringe) elastische Formänderung des Balkens vernachlässigt und die Lage der Kräfte so annimmt, wie sie aus der ursprünglichen Balkenform sich ergiebt.

Die Stabkräfte sind ihrer Richtung nach durch den geometrischen Zusammenhang des Fachwerks gegeben; es bleibt nur ihre Gröfse zu ermitteln.

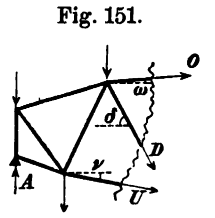
Die Stäbe, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, bilden den Ober- bezw. Untergurt, welche beim Vollwandbalken auch vorkamen (S. 118). Die Spannkräfte dieser Gurten werden hier ebenfalls mit O bezw. U, ihre Neigungswinkel gegen die Wagerechte mit ω und ν bezeichnet (Fig. 151). Die Stäbe, welche die Gurten mit einander verbinden (also die Wand des Vollträgers ersetzen), werden im Allgemeinen Wandglieder, Füllungsstäbe, Gitterstäbe genannt; die schräg stehenden Wandglieder nennt man im Besonderen Streben oder Diagonalen und ihre Spannkraft D (mit dem Neigungswinkel δ gegen die Wagerechte), die etwa lothrecht stehenden aber Ständer, Pfosten oder Vertikalen mit der Spannkraft V.

Uebrigens sind die Ständer bei der Berechnung nur Sonderfälle der Streben (indem $\delta = 90^0$ wird).

II. Berechnung der Stabkräfte.

Behufs der Spannungs-Ermittelung zerlegt man das Fachwerk durch einen Schnitt in zwei Theile und betrachtet den einen Abschnitt, etwa den linksseitigen (Fig. 151). Bringt man dann an den durchschnittenen Stäben die unbekannten Spannkräfte O, D und U an, so müssen diese dem Auflagerdruck A und den Lasten links vom Schnitte das Gleichgewicht halten. Für Kräfte in einer Ebene lassen sich nun 3 von einander unabhängige Gleichgewichts-Bedingungen aufstellen, aus denen man also 3 Unbekannte ermitteln kann. Die an dem Schnitt auftretenden Stabkräfte sind daher ohne Weiteres zu berechnen, wenn ihre Anzahl höchstens 3 beträgt (wie in Fig. 151 der Fall ist). Das ganze Fachwerk ist demnach unmittelbar zu berechnen, wenn jeder Stab durch einen Schnitt getroffen werden kann, der, das Fachwerk in 2 Theile zerlegend, im Ganzen höchstens 3 Stäbe durchschneidet. Bei dem gewöhnlichen Fachwerksbalken ist diese Bedingung erfüllt, wie man aus Fig. 150 leicht erkennt.

Fig. 151.

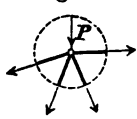


Weicht die Form des Fachwerks aber von dem einfachen Dreiecksnetz ab, so kann es vorkommen, dass ein Stab **nicht** durch einen Schnitt getroffen werden kann, der im Ganzen höchstens 3 Stäbe durchschneidet; man bekommt dann an der Schnittstelle mehr als 3 unbekannte Stabkräfte. In solchem Fall ist die Berechnung verwickelter, u. zw. reichen dazu entweder die Gleichgewichts-Bedingungen noch aus, oder aber es ist die Berechnung nur unter Zuhülfenahme der Lehre von der elastischen Formänderung des Fachwerks möglich, wenn man nicht an Stelle derselben gewisse vereinfachende Annahmen benutzen will.

Ob ein Fachwerkbalken auf 2 Stützen noch mittels alleiniger Anwendung der Gleichgewichts-Bedingungen berechnet werden kann, ob er **statisch bestimmt** ist, hängt zunächst von der Beziehung zwischen der Anzahl der Stäbe und der Anzahl der

Knotenpunkte ab, die in dem Fachwerke vorkommen. Die Anzahl der Stäbe sei s, die der Knoten k. Führt man um irgend einen Knoten des Fachwerks einen kreisförmigen Schnitt und betrachtet den herausgeschnittenen Theil (Fig. 152), so muss dieser unter Einwirkung der äufseren Kraft P des Knotenpunktes und der inneren Kräfte der durchschnittenen Stäbe im Gleichgewichte sein. Da die Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, so kann man für sie nur 2 Gleichgewichts-Gleichungen aufstellen. Bei k Knoten ergeben sich hiernach $2k$ Gleichungen. Diese enthalten aber in sich auch die Bedingungen für das Gleichgewicht des ganzen Balkens (denn sind alle Knotenpunkte im Gleichgewichte, so muss dies auch für das ganze Fachwerk gelten), u. zw. sind jene Bedingungen durch 3 Gleichungen auszudrücken. Mithin bleiben für die Berechnung der Stabkräfte noch $2k - 3$ Gleichungen verfügbar. Sollen daher die Stabkräfte aus den Gleichgewichts-Bedingungen zu ermitteln, soll das Fachwerk auf 2 Stützen **statisch bestimmt** sein, so darf die Anzahl s der Stäbe nicht mehr als $2k - 3$ betragen.

Fig. 152.



Ein Vieleck von k Eckpunkten ist bekanntlich durch $2k - 3$ von einander unabhängige Stücke geometrisch bestimmt; das Gelenk-Fachwerk von k Knotenpunkten erfordert also mindestens $2k - 3$ Stäbe, um **steif** (geometrisch bestimmt) zu sein.

Soll daher das Fachwerk zugleich **steif und statisch bestimmt** sein, so muss die Bedingung

$$1) \qquad s = 2k - 3$$

stattfinden. Ein solches Fachwerk heifst (nach Mohr) ein **einfaches Fachwerk**.

Dass das einfache Dreiecksnetz (wie Fig. 150) zugleich steif und statisch bestimmt sei, wurde oben unmittelbar gezeigt; es trifft bei ihm auch die Bedingung $s = 2k - 3$ zu. (In Fig. 150 ist z. B. $k = 11$, $s = 19$, und es gilt $19 = 2 \cdot 11 - 3$.) Aber auch jeder andere Fachwerkbalken auf 2 Stützen muss derselben Bedingung genügen, wenn er zugleich steif und statisch bestimmt sein soll.

Ist die Anzahl der Stäbe geringer, so ist das Stabnetz nicht steif, sondern eine **veränderliche** Figur, die als Balken (für beliebige Lasten) nicht benutzt werden kann, weil jede Aenderung der Belastung eine Aenderung der Gleichgewichtsform bedingt.

Ist aber $s > 2k - 3$, so ist das Netz geometrisch überbestimmt, es sind die einzelnen Stablängen nicht mehr unabhängig von einander. Der einfachste Fall dieser Art ist ein Viereck mit 2 Diagonalen (Fig. 153); die zweite Diagonale lässt sich nur einfügen, wenn sie eine, durch die übrigen 5 Stäbe schon genau bestimmte Länge hat. Weicht ihre Länge von diesem Maſse ab, so ist die Einfügung (wenn man Temperaturänderungen ausschlieſst) nur durch elastische Längenänderung der einzelnen Stäbe möglich; es entstehen daher schon Spannungen in dem Fachwerke, bevor noch Lasten aufgebracht sind, u. zw. sind diese Spannungen nur auf Grund der elastischen Formänderungen zu berechnen, sind also statisch unbestimmt, und bleiben es auch, wenn äuſsere Kräfte an den Knotenpunkten angreifen, weil eben die Zahl der Stabkräfte s gröſser ist als die Zahl der verfügbaren Gleichgewichts-Bedingungen.

Fig. 153.

Wird eine der Bedingung $s = 2k - 3$ entsprechende Anzahl von Stäben nicht in der einfachen Weise der Fig. 150 zu Dreiecken aneinander gereiht (ohne jede Kreuzung der Diagonalen), sondern bildet man das Netz in der Weise der Fig. 154, indem man von dem Dreieck 1 2 3 ausgeht, den neuen Punkt 4 gegen 2 und 3 durch 2 Stäbe festlegt, den neuen Punkt 5 mit 2 und 3 verbindet, u. s. f., so entsteht ebenfalls eine unveränderliche Figur, ein steifes Fachwerk. Die Berechnung der Stabkräfte ist allerdings nicht in der einfachen Weise, wie bei Fig. 151 ausführbar, weil man z. B. den Stab 2 3 nur durch einen Schnitt treffen kann, der mehr als 3 Stäbe durchschneidet; immerhin aber gelingt die Spannungs-Ermittelung aus den Gleichgewichts-Bedingungen mit Hülfe eines Umweges indem man etwa, von der rechten Seite beginnend, zunächst die Kraft in 4 7 unmittelbar berechnet, diese dann bei der Bestimmung der Kraft in 2 5 als bekannte Gröſse benutzt und in solcher Weise fortfährt; man hat dann an jedem Schnitte nur mit 3 u n b e k a n n t e n Spannkräften zu thun); das Fachwerk ist daher statisch bestimmt.

Fig. 154.

Geschieht aber bei derselben Zahl von Stäben und Knotenpunkten die Anordnung in der Weise der Fig. 155, so ist das rechtsseitige Viereck ohne jede

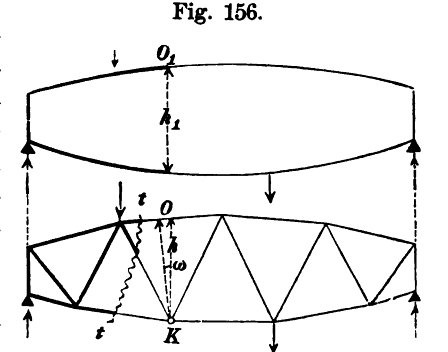
Fig. 155.

Diagonale offenbar verschieblich, daher das Fachwerk überhaupt nicht steif, während zugleich das mittlere Viereck wegen des Vorhandenseins zweier Diagonalen geometrisch überbestimmt und statisch unbestimmbar ist.

Die Bedingung $s = 2k - 3$ ist daher für die Steifigkeit und statische Bestimmtheit wohl nothwendig, aber nicht hinreichend. Die allgemeinen Regeln über die sicheren Kennzeichen statisch bestimmter, steifer Fachwerke*) sollen hier jedoch übergangen werden, weil man in den meisten der wirklich vorkommenden Fälle die Entscheidung durch einfache Betrachtung gewinnen kann.

Die Berechnung der Stabkräfte O, U und D an irgend einem Schnitt eines einfachen Fachwerkbalkens kann in ähnlicher Weise geschehen, wie die Ermittelung der Gurtkräfte O und U und der Wandscheerkraft Y eines vollwandigen Trägers von entsprechender Form und Anordnung. Geht man von einem Träger auf 2 Stützen mit dünner, voller Wand und mit gekrümmten Gurten aus, bildet nun einen entsprechenden Fachwerkbalken, indem man auf den Mittellinien der Gurten beliebige Punkte als Knotenpunkte wählt und diese durch Gurtstäbe und durch Streben verbindet (Fig. 156), so haben diese beiden Träger eine gewisse Uebereinstimmung in ihren allgemeinen Eigenschaften; man kann aus dem Verhalten des vollwandigen Trägers auf dasjenige des Fachwerkbalkens schliefsen. Nur zeigt der Vollwandträger in allen wichtigen Beziehungen stetige Veränderlichkeit, während sich an dem Fachwerke vieles unstetig, sprungweise ändert. Bei ersterem ändern sich die Gurtrichtungen und auch die Gröfsen der Spannkräfte O, U und Y stetig, wenn man den senkrechten Schnitt längs der Spannweite verschiebt; bei letzterem sind die

Fig. 156.



*) Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl., 1. Bd., S. 214, 228 und 435. — G. Lang, Zur Entwicklungsgeschichte der Spannwerke des Bauwesens, S. 173—184. — M. Grübler, Beiträge zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerkes; Rigasche Industrie-Zeitung 1888, S. 277.

Stabkräfte auf die Länge eines Stabes von derselben Gröfse und Richtung, ändern sich aber sprungweise, sobald man, einen Knotenpunkt überschreitend, zu einem benachbarten Stabe übergeht.

Bringt man an beliebigen Knotenpunkten des Fachwerks irgend welche Lasten an und giebt dem Vollwandträger an denselben Stellen die gleichen Lasten, so sind auch die Auflagerdrücke völlig übereinstimmend.

Soll nun die Kraft O in einem Stabe des Obergurts berechnet werden, so legen wir durch diesen Stab an beliebiger Stelle zwischen seinen Endpunkten einen Schnitt tt, der noch eine Strebe und einen Stab des Untergurts trifft, und wählen [nach dem Verfahren von A. Ritter*)] den Schnittpunkt K der beiden letzteren Stäbe zum Drehpunkte für die Momentengleichung der Kräfte links vom Schnitt. Ist h die lothrecht gemessene Trägerhöhe an der Stelle K, so ist $h \cos \omega$ der Hebelarm von O, mithin $h \cos \omega\, O$ die Momentensumme der inneren Kräfte oder das Widerstandsmoment in Bezug auf K, und dieses muss der Momentensumme der äufseren Kräfte oder dem Biegungsmomente M, bezogen auf K, gleich und entgegengesetzt sein.

Führt man nun in der Lothrechten des Punktes K einen Schnitt durch den Vollträger, so ist das Biegungsmoment M für diesen Schnitt genau dasselbe, und dieses wird (nach S. 119) durch das Widerstandsmoment $h_1 \cos \omega_1\, O_1$ aufgenommen. Hätte der Obergurt des Vollwandträgers dieselbe geknickte Form, wie der des Fachwerks, so wäre $h_1 = h$, $\omega_1 = \omega$ und daher auch $O_1 = O$; bei stetig gekrümmter Form aber werden diese Werthe nicht ganz übereinstimmen; jedoch ist der Unterschied meist so unbedeutend, dass er bei bestimmten Beispielen wohl zahlenmäfsig hervortritt, aber auf die allgemeinen Regeln für die Berechnung von O bei einer bestimmten Trägerform keinen wesentlichen Einfluss übt.

Die Kräfte der Stäbe des Obergurts werden durch die Biegungsmomente in Bezug auf die gegenüberliegenden Knotenpunkte des Untergurts bedingt, und umgekehrt. Bei senkrecht abwärts gerichteten Lasten ist O stets ein Druck, U stets ein Zug. Aus den Untersuchungen auf S. 73 und 120 folgt daher, dass auf eine Gurtkraft sämmtliche Lasten in gleichem Sinne

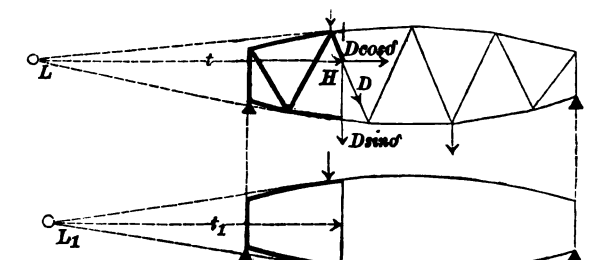
---

*) Ueber die Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen; Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins 1861, S. 412.

einwirken, dass die Zug- und Druckkräfte des Unter- bezw. Obergurts möglichst groſs werden, wenn möglichst viele Lasten sich auf dem Träger befinden und wenn die schwersten Lasten thunlichst in der Nähe des Momenten-Drehpunktes angebracht werden.

Zur Berechnung der Kraft D in einer nach rechts abfallenden Strebe (welche zwischen zwei nach rechts ansteigenden liegt, Fig. 157) führt man durch diese einen Schnitt, der auſserdem zwei Gurtstäbe O und U trifft (wenn wir der Abkürzung wegen die Stäbe durch dieselben Buchstaben bezeichnen wie die entsprechenden Stabkräfte), und benutzt den Schnitt L von O und U zum Drehpunkte. Zieht man durch L eine Wagerechte, welche die Strebe D in H schneidet, setzt $LH = t$ und zerlegt die Kraft D an der Stelle H in die Seitenkräfte $D \cos \delta$ und $D \sin \delta$, so hat die erstere kein Moment, die letztere aber das Moment $+ D \sin \delta \cdot t$. Führt man in der Senkrechten des Punktes H einen Schnitt durch den entsprechenden Vollwand-Träger und legt an die Schnittstellen der Gurten Tangenten, welche sich in L_1, in dem Abstande t_1 vom Schnitte treffen, so ist Yt_1 die Momentensumme der inneren Kräfte in Bezug auf L_1. Es wird nun t_1 von t im Allgemeinen abweichen; lässt man aber diesen

Fig. 157.



Unterschied unberücksichtigt, so wird $D \sin \delta = Y$, d. h. die senkrechte Seitenkraft der nach rechts abfallenden Strebe D entspricht der Wandscheerkraft Y beim vollwandigen Träger (S. 119).

Ist die Strebe eine nach rechts ansteigende, und bringt man (wiederum das linksseitige Stück betrachtend) an dem Schnitte derselben eine Zugkraft D an, so ist diese schräg

aufwärts gerichtet; das Widerstandsmoment wird dann $-D\sin\delta\cdot t$, d. h. die senkrechte Seitenkraft $D\sin\delta$ einer nach rechts ansteigenden Strebe entspricht dem Entgegengesetzten der Wandscheerkraft Y.

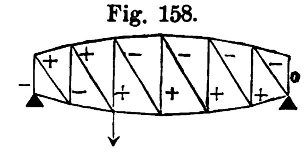
Ist also Y positiv (am linksseitigen Stücke abwärts gerichtet), so erfährt die entsprechende, nach rechts abfallende Strebe Zug, eine ansteigende Strebe Druck, und umgekehrt.

Liegt nun bei beiden Trägern der Drehpunkt L bezw. L_1 aufserhalb der Spannweite, so verursacht (nach S. 121) jede Last rechts vom Schnitt ein positives Y, und umgekehrt. Es folgt hieraus: Liegt der Drehpunkt L aufserhalb der Spannweite, so erfährt eine nach rechts abfallende Strebe (welche zwischen zwei rechts ansteigenden liegt) durch Lasten rechts vom Schnitte Zug, durch Lasten links vom Schnitte Druck — und umgekehrt. Oder man kann (unter denselben Voraussetzungen) auch sagen: eine Strebe erfährt **Zug** durch Lasten desjenigen Trägerabschnittes, welchem der **untere** Endpunkt der Strebe zugehört, und umgekehrt.*)

Diese Fassung hat den Vortheil, dass sie leicht auf die Vorstellung einer oben befestigten und unten belasteten, bezw. unten befestigten und oben belasteten Stange hinweist, sich daher leicht einprägt.

Obiger Satz gilt auch für Ständer; denn stellt man eine Strebe allmählich steiler und steiler, so entsteht der Ständer als Grenzfall einer Strebe, die mit den beiden benachbarten entgegengesetzte Steigung hat. In Fig. 158 sind die durch eine Last erzeugten Zug- und Druck-Spannungen durch + und — angegeben.

Fig. 158.



Streben und Ständer sind hiernach (vgl. S. 122) auf einseitige Belastung zu berechnen, wobei man die schwersten Lasten dem betreffenden Stabe thunlichst zu nähern hat.

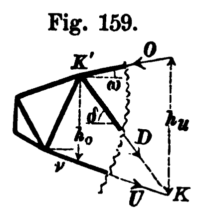
Für die Strebenkraft D lässt sich eine allgemeine Formel einfacher Art entwickeln. Da die äufseren Kräfte senkrecht stehen, so müssen die inneren Kräfte an einer Schnittstelle für sich allein der Gleichung der wagerechten Kräfte genügen, oder

---

*) Technische Mechanik, bearbeitet vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum zu Stuttgart, 1878, S. 53.

es muss (Fig. 159) $D \cos \delta = O \cos \omega - U \cos \nu$ sein. Nennt man nun das Biegungsmoment in Bezug auf den unteren Endpunkt der Strebe M_u und die diesem Endpunkte K entsprechende senkrechte Trägerhöhe h_u, während M_o und h_o sich auf den oberen Endpunkt K' der Strebe beziehen, so ist $O \cos \omega\, h_u = M_u$ und $U \cos \nu\, h_o = M_o$, mithin

Fig. 159.



$$D \cos \delta = \left(\frac{M}{h}\right)_u - \left(\frac{M}{h}\right)_o. \tag{2}$$

Man berechnet also für eine gegebene Belastungsart $M:h$ für den unteren und $M:h$ für den oberen Endpunkt der Strebe und zieht von ersterem Werthe den letzteren ab, um die wagerechte Strebenkraft für diese Belastungsart zu erhalten. Man findet leicht, dass die Gleichung 2 auch für rechts ansteigende Streben in unveränderter Weise gilt und dass auch das positive oder negative Vorzeichen der Differenz der rechten Seite einen Zug oder Druck in der Strebe bestimmt angiebt.

III. Einflusslinien.

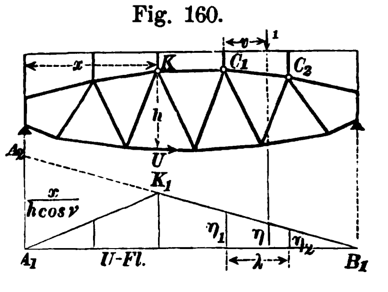
Wir machen die Voraussetznng, dass die Lasten nur an den Knotenpunkten des einen Gurtes, z. B. des oberen, angreifen und nennen diesen den belasteten Gurt. Für die Berechnung der Spannkräfte des unbelasteten Gurtes dienen die Knotenpunkte des anderen als Drehpunkte.

Einflusslinie für den unbelasteten Gurt. Da für die Spannkraft U in einem beliebigen Stabe des unbelasteten Untergurts dieselbe Gleichung

$$U = \frac{M_k}{h \cos \nu}$$

gilt wie für einen Vollträger (M_k bedeutet das Biegungsmoment in Bezug auf den Knotenpunkt K des belasteten Gurtes, Fig. 160), so wird auch die Einflusslinie für U dieselbe werden wie in Figur 110b, S. 120. Hat der Dreh-

Fig. 160.



punkt K den Abstand x vom linksseitigen Auflager, so macht man $A_1 A_2 = \frac{x}{h \cos \nu}$, wodurch sich das Dreieck $A_1 B_1 K_1$ bestimmt.

Da aber auf das Fachwerk nur in Knotenpunkten des belasteten Gurtes Kräfte übertragen werden, so haben einstweilen nur diejenigen Einfluss-Ordinaten Bedeutung, welche in den Senkrechten durch die Lastpunkte liegen. Es möge nun eine Brückenbahn sich in der Weise auf den belasteten Gurt stützen, dass kleine einfache Zwischenträger von einem Lastpunkte zum anderen gestreckt sind; auf diese Weise entstehen s. g. Fache von der wagerechten Länge λ (z. B. zwischen C_1 und C_2). Befindet sich dann eine Last 1 auf einem solchen Zwischenträger im Abstande v von C_1, so zerlegt sie sich in die beiden Knotenpunkts-Lasten

$$C_1 = 1 - \frac{v}{\lambda} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{v}{\lambda},$$

und diese erst wirken auf das Fachwerk. Nach der Einflussfigur würden aber Lasten Eins, in C_1 und C_2 wirkend, Spannkräfte U von den Gröfsen η_1 bezw. η_2 erzeugen; die Knotenpunktslasten C_1 und C_2 bringen daher einzeln die Spannkräfte $C_1 \eta_1$ und $C_2 \eta_2$ hervor. Die beliebig liegende Last Eins verursacht nun die gleichzeitige Einwirkung von C_1 und C_2, mithin die Spannkraft

$$\eta = C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2 = \eta_1 - \frac{v}{\lambda} \eta_1 + \frac{v}{\lambda} \eta_2.$$

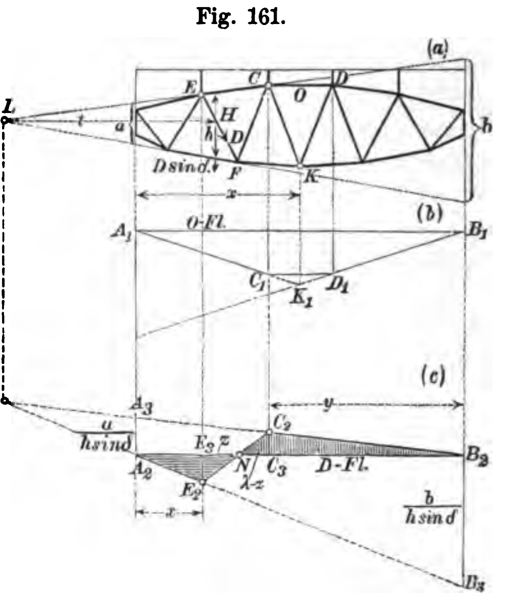
Dieser Ausdruck ist nach v einfach linear; für $v = o$ wird $\eta = \eta_1$, für $v = \lambda$ wird $\eta = \eta_2$. Die Verbindungs-Gerade der Endpunkte der benachbarten Einfluss-Ordinaten η_1 und η_2 ist demnach die Einflusslinie für U auf die Länge eines Faches λ.

Die Einflusslinie für U ist hier nur beispielsweise gewählt; es gilt nach der vorstehenden Entwicklung allgemein: Werden die Lasten durch einfache Zwischenträger auf bestimmte Lastpunkte übertragen, so ist die Einflusslinie zwischen 2 solchen Lastpunkten eine Gerade.

In dem jetzt vorliegenden einfachen Falle, wo der Knickpunkt K_1 in Fig. 160 auf einer Lastpunkt-Senkrechten liegt, bleibt hiernach das Dreieck $A_1 K_1 B_1$ als Einflussfigur für U mit der erweiterten Bedeutung bestehen, dass auch jede Zwischen-Ordinate η gültig ist.

Einflusslinie für den belasteten Gurt. Anders ist es aber mit der Einflusslinie für die Spannkraft O in einem Stabe des belasteten Gurtes (Fig. 161). Der jetzt maßgebende Drehpunkt K bestimmt in derselben Weise, wie in Fig. 160, das Dreieck $A_1\, B_1\, K_1$ (Fig. 161 b). Nach dem letzten Satze muss aber die Einflusslinie zwischen den Knotenpunkten C und D des durchschnittenen Faches eine Gerade $C_1\, D_1$ sein; daher entsteht als Einflussfigur nun das Viereck $A_1\, B_1\, D_1\, C_1$, in welchem der zur Konstruktion benutzte Punkt K_1 in der Senkrechten durch den Drehpunkt K nicht mehr vorkommt. Ist das Fachwerk aber ein Ständer-Fachwerk, d. h. enthält es senkrechte Pfosten, so dass der Drehpunkt K in einer Lastpunkt-Senkrechten liegt, so fällt die mittlere Seite $C_1\, D_1$ der Einflussfigur fort, und diese wird wieder ein Dreieck. (Da O negativ, so sind die Einfluss-Ordinaten nach unten aufgetragen.)

Fig. 161.



Einflusslinie für eine Strebe. Weil $D \sin \delta$ der Wandscheerkraft Y eines Vollwandträgers entspricht, so wird die Einflusslinie für D im Allgemeinen dieselbe Form haben müssen wie die für Y (Fig. 110 c, S. 120), nur sind die Ordinaten noch durch $\sin \delta$ zu theilen. Auf den Stützen-Senkrechten hat man daher jetzt (Fig. 161 (c))

$$1) \qquad A_2\, A_3 = \frac{a}{h \sin \delta} \quad \text{bezw.} \quad B_2\, B_3 = \frac{b}{h \sin \delta}$$

aufzutragen, um die Hauptlinien $A_2\, B_3$ und $B_2\, A_3$ zu erhalten. Wir betrachten die nach rechts abfallende Strebe EF (Fig. 161 a), welche durch rechtsseitige Lasten positiv gespannt wird; daher ist $A_2 A_3$ nach oben aufgetragen, während eine nach rechts ansteigende

Strebe das Umgekehrte erfordern würde. $B_3 A_2$ und $B_2 A_3$ schneiden sich wieder auf der Senkrechten durch den Drehpunkt L. Die Linie $B_2 A_3$ gilt rechts vom durchschnittenen Fache, d. h. bis C_2, die $A_2 B_3$ aber gilt bis zum linksseitigen Lastpunkte E des durchschnittenen Faches, d. h. bis E_2, und diese beiden Punkte sind nun nach dem Satze auf Seite 173 durch eine Gerade $E_2 C_2$ zu verbinden, so dass $A_2 E_2 C_2 B_2$ die Einflussfigur darstellt. In den Gleichungen 1 bedeutet h die Trägerhöhe an der Stelle H, wo eine Wagerechte durch den Drehpunkt L die betreffende Strebe EF trifft. Der Drehpunkt L ist selbstverständlich der Schnittpunkt der Richtungen der beiden Gurtstücke, welche der durch die Strebe geführte Schnitt außer ihr trifft; a und b sind die Abschnitte auf den Auflager-Senkrechten, welche diese beiden Gurtrichtungen zwischen sich fassen. Die maßgebenden Größen für das Zeichnen der Einflusslinie kann man auch leicht unmittelbar finden, ohne auf den Vollträger zurückzugreifen, wenn man das bei diesem benutzte Verfahren (S. 120 und 121) auf das Fachwerk sinngemäß anwendet.

Der Punkt N, in welchem die Einflusslinie $E_2 C_2$ die Achse schneidet, heißt der Einfluss-Nullpunkt, weil eine an dieser Stelle angebrachte Last eine Kraft $D = 0$ hervorbringt. Jede Last rechts von N hat positiven Einfluss, und umgekehrt. Die Fachlänge $E_3 C_3 = \lambda$ wird durch N in die beiden Theile $E_3 N = z$ und $N C_3 = \lambda - z$ zerlegt; um deren Verhältnis zu erfahren, nennen wir die Trägerlängen links bezw. rechts vom durchschnittenen Fache $A_2 E_3 = x$, $B_2 C_3 = y$; dann ist

$$E_2 E_3 = \frac{b}{h \sin \delta} \frac{x}{l}, \quad C_2 C_3 = \frac{a}{h \sin \delta} \frac{y}{l},$$

woraus leicht folgt:

$$2) \qquad \frac{z}{\lambda - z} = \frac{b}{a} \frac{x}{y}.$$

Man kann die Lage des Nullpunktes auch leicht unmittelbar am Träger finden (Fig. 162). Zieht man die Richtung des vom Schnitte getroffenen Stabes der unbelasteten Gurtung bis zu den Schnittpunkten A_1 und B_1 mit den Auflagersenkrechten durch, zieht ferner, wenn EC das durchschnittene Fach, $A_1 E$ und $B_1 C$, so treffen sich diese bei N in der Einfluss-Nullstelle. Verlängert man nämlich (zum Nachweise) auch EC

Fig. 162.

bis zu den Auflagern und nennt die einzelnen Stücke dieser Geraden x', z', $\lambda' - z'$ und y', so findet man aus ähnlichen Dreiecken der Figur leicht

$$\frac{z'}{c} = \frac{x'}{a}, \quad \frac{\lambda' - z'}{c} = \frac{y'}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{z'}{\lambda' - z'} = \frac{b}{a}\frac{x'}{y'}.$$

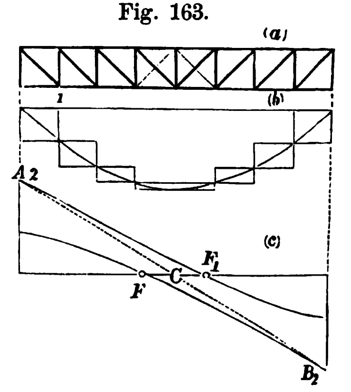
Dies entspricht aber der Gl. 2, weil die Strecken x', z', $\lambda' - z'$ und y' ihren wagerechten Projektionen x, z, $\lambda - z$ und y proportional sind.

IV. Der Parallel-Fachwerkbalken.

Um die besonderen Eigenschaften bestimmter Trägerformen leicht übersehen zu können, muss man einfache Belastungsfälle annehmen. Es gehe die Belastung hervor aus einer ständigen gleichmäfsigen Belastung g und einer beweglichen gleichmäfsigen Belastung p. Schliefsen sich nun an einen Lastpunkt des Fachwerks ungleiche Fachweiten λ_1 und λ_2 links und rechts an, so erfährt er durch die Zwischenträger eine ständige Knotenpunktslast $G = {}^1/_2\, g\,(\lambda_1 + \lambda_2)$, eine bewegliche $P = {}^1/_2\, p\,(\lambda_1 + \lambda_2)$, woraus bei gleichen Fachweiten $G = g\,\lambda$ und $P = p\,\lambda$ wird.

Die Biegungsmomente in Bezug auf die einzelnen Knotenpunkte werden durch die Umwandelung der stetigen Lasten in Knotenpunkts-Drücke nicht geändert. Die Gurtkräfte nehmen daher beim Träger mit parallelen Gurten unter voller Belastung von $H = \frac{q\,l^2}{8\,h_m}$ in der Mitte bis auf Null an den Auflagern ab, u. zw. nach parabolischem Gesetze (entsprechend der Momenten-Parabel). Die Aenderung erfolgt aber nicht stetig, wie beim vollwandigen Träger, sondern sprungweise. Wenn die Streben wie in Fig. 163(a) nach der Mitte abfallen, so ist für das erste Fach des Obergurts der Knotenpunkt 1 als Drehpunkt mafsgebend, für das zweite Fach kommt dann sogleich der nächste Knotenpunkt in Frage; daraus folgt, dass die Darstellung der Kräfte des Obergurts ein stufenförmiger, die Parabel aufsen umschliefsender Linienzug wird (Fig. 163b), während die Kräfte des Untergurts, mit Null beginnend, eine innere Stufenreihe

Fig. 163.



bilden. Bei entgegengesetzter Neigung der Streben würde sich diese Beziehung umkehren.

Die Wandscheerkraft $Y = Q$ (beim vollwandigen Parallelträger) ändert sich bekanntlich bei voller Belastung nach dem Gesetze der Geraden $A_2 C B_2$ (Fig. 163c). Jede nach rechts abfallende Strebe wird nun bei positivem Y gezogen, und umgekehrt. Bei voller Belastung werden mithin die nach der Mitte abfallenden Streben sämmtlich gezogen; an den Auflagern ist $D \sin \delta = A$, nach der Mitte hin nimmt $D \sin \delta$ (nahezu) bis auf Null ab. Bei ungünstigster einseitiger Belastung (vgl. Fig. 77, S. 75) kommen die parabolischen Darstellungen von Q_{max} und Q_{min} in Frage; danach wird die Abnahme der Strebenkräfte nach der Mitte hin etwas abgeschwächt (gegenüber voller Belastung), bleibt aber immerhin noch eine erhebliche.

Links von dem Punkte F ist Y stets positiv; die nach rechts abfallenden Streben werden daher zwischen A und F stets gezogen; von F bis zur Mitte tritt neben dem Zuge auch ein (kleinerer) Druck auf; an der rechten Hälfte ist alles symmetrisch. Diese nach der Mitte abfallenden Streben sind beim Parallelträger also wesentlich Zugstreben; nur in den mittleren Fachen zwischen F und F_1 kommen daneben auch kleine Druckspannungen vor.

Führt man um einen unbelasteten Knotenpunkt einen kreisförmigen Schnitt und betrachtet das herausgeschnittene Stück, so verlangt die Gleichung der senkrechten Kräfte für Strebe und Ständer, welche hier zusammentreffen (Fig. 164)

Fig. 164.

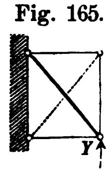
1) $$V = -D \sin \delta.$$

Die Ständerkräfte kann man daher auf die Strebenkräfte zurückführen und braucht sie nicht besonders zu berechnen. Werden die Streben wesentlich gezogen, so bekommen die Ständer vorwiegend Druck (von der Mitte nach den Enden zunehmend) und umgekehrt.

Da nun die Streben länger sind als die Ständer, und da beim Widerstande gegen Zerknicken eine geringe Länge vortheilhaft, so ist es in der Regel zweckmäfsig, wenn die (längeren) Streben vorwiegend gezogen, die (kürzeren) Ständer also vorwiegend gedrückt werden. Es bilden daher nach der Mitte abfallende Streben (bei Eisenbrücken) die Regel.

Der in den Mittelfachen auch vorkommende Druck in den Streben würde meist eine erhebliche Querschnitts-Vergrößerung bedingen. Man sucht ihnen daher diesen Druck noch abzunehmen, indem man entgegengesetzt gerichtete Zugstreben in den Mittelfachen hinzufügt. Denkt man sich nämlich einen viereckigen Rahmen aus Gelenkstangen an der linken Seite festgehalten (Fig. 165), an der rechten Seite durch eine aufwärts gerichtete Kraft Y angegriffen, so kann der Verschiebung des Vierecks (durch Y) ebenso wohl durch den Druckwiderstand einer nach rechts fallenden, wie durch den (gleichen) Zugwiderstand einer nach rechts steigenden Strebe entgegengewirkt werden. Sind nun **beide** Streben aus dünnem Flacheisen hergestellt (reine Zugstreben), so leisten sie einem Drucke fast gar keinen Widerstand, sondern biegen sich (in unschädlicher Weise) etwas aus. Es tritt daher von beiden Streben immer nur die eine in Wirkung, welche Zug bekommt. Die bei **voller** Belastung gespannten Streben heißen **Hauptstreben**, die anderen **Gegenstreben**.

Fig. 165.



Hiernach ergeben sich von A bis F_1 (Fig. 163c) rechtsfallende Zugstreben, deren Spannkraft nach F_1 hin (nahezu) bis auf Null abnimmt; die anders gerichtete Streben-Schaar von B bis F ist ganz symmetrisch.

Bei einem Parallelträger mit reinen **Zugstreben** sind nach Gl. 1 (S. 177) in den **Ständern** nur **Druckkräfte** möglich.

Ob die Belastung oben oder unten am Balken angreift, ist für Gurten und Streben gleichgültig; nur die Ständer werden davon beeinflusst (Fig. 166). Liegen die Lasten **oben**, so wird $V_1 = -D_1 \sin\delta$, liegen sie **unten**, so wird $V_1 = -D_2 \sin\delta$; im ersten Falle werden daher die Druckkräfte in den Ständern größer.

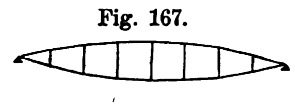
Fig. 166.

V. Der parabolische Fachwerkbalken.

Bei diesem bilden die Gurten Sehnenvielecke von Parabeln. Ist eine volle gleichmäßige Belastung q durch kleine Zwischenträger auf die einzelnen Knotenpunkte übertragen, so wird das Gleichgewicht schon durch Ständer allein, ohne Streben, erhalten

(Fig. 167), weil solche parabolische Stangenverbindungen bekanntlich Gleichgewichtsformen für die angenommene Belastungsart sind. Die in Wirklichkeit vorhandenen Streben werden daher bei voller Belastung unwirksam, d. h. spannungslos; die Gurten aber werden so gespannt, dass ihre wagerechte Seitenkraft den überall gleichen Werth

Fig. 167.



$H = \frac{q\,l^2}{8\,h_m}$ hat. (Es ist h_m die Trägerhöhe in der Mitte, h die an beliebiger Stelle.) In polygonalen Gurten parabolischer Träger nehmen daher die Kräfte nach den Enden hin schwach zu (s. S. 124 und 126), im Gegensatze zum Parallelträger.

Dafs die Streben bei voller Belastung spannungslos sind, folgt auch aus Gl. 2, S. 172

$$D \cos \delta = \left(\frac{M}{h}\right)_u - \left(\frac{M}{h}\right)_o,$$

da hier die Trägerhöhe sich in gleichem Verhältnisse wie M ändert, $M : h$ also überall gleichen Werth hat.

Die Streben sind auf einseitige Belastung zu berechnen. Da nun beim parabolischen Vollträger

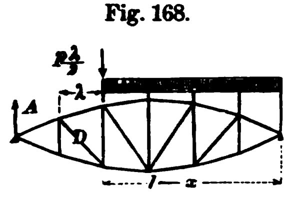
$$Y_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{p\,l}{8} \frac{h}{h_m} \quad \text{(s. S. 125)},$$

so werden (bei nur einer Strebe in jedem Fache) sämmtliche Streben abwechselnd gleich stark auf Zug und auf Druck beansprucht.

Für die stärkste Strebenkraft lässt sich eine Formel von gleicher Einfachheit mit der Formel für Y ableiten, wenn man die einseitige Belastung etwas ungünstiger annimmt, als sie sich nach der Einflusslinie in Fig. 161c ergeben würde. Bei gleichmäfsiger beweglicher Last p müsste diese für D_{max} vom Auflager B bis zum Einfluss-Nullpunkte N reichen. Dann bekommt der rechtsseitige Knotenpunkt C des durchschnittenen Faches nicht die volle Knotenpunktsbelastung $P = p\,\lambda$ der weiter nach rechts liegenden Gelenkpunkte, sondern einen geringeren Druck; der linksseitige Knotenpunkt E, dessen Belastung negativ einwirkt, bekommt aber auch schon eine gewisse Belastung. Wir vernachlässigen nun diese letztere Einwirkung und erhöhen den positiven Einfluss des rechtsseitigen Knotenpunktes, indem wir

seine Belastung (der Einfachheit wegen) zu dem vollen Werthe $P = p\lambda$ der übrigen Lasten annehmen; oder, was genau dasselbe bedeutet, wir denken uns die Last p von B aus nur bis an das durchschnittene Fach vorgeschoben und fügen am Vorderende der Last eine Einzelkraft $\frac{1}{2} p \lambda$ hinzu*), wenn λ die Länge des durchschnittenen Faches ist (Fig. 168). Für diesen Belastungsfall berechnen wir nun D_{max} nach der Gl. 2, S. 172:

Fig. 168.



$$D_{max} \cos \delta = \left(\frac{M}{h}\right)_u - \left(\frac{M}{h}\right)_o .$$

Es ist $A = p\frac{(l-x)^2}{2l} + \frac{p\lambda}{2}\frac{l-x}{l} = p\frac{l-x}{2l}(l-x+\lambda)$.

$$\left(\frac{M}{h}\right)_u = \frac{Ax}{h_u} = \frac{A x l^2}{4 h_m x (l-x)} = \frac{A l^2}{4 h_m (l-x)},$$

ebenso (indem man $l-x$ mit $l-x+\lambda$ vertauscht)

$$\left(\frac{M}{h}\right)_o = \frac{A l^2}{4 h_m (l-x+\lambda)};$$

mithin $$D_{max} \cos \delta = \frac{A l^2}{4 h_m}\left(\frac{1}{l-x} - \frac{1}{l-x+\lambda}\right).$$

Setzt man hierin den Werth für A ein, so folgt nach geeigneter Zusammenziehung:

$$D_{max} \cos \delta = \frac{p l}{8 h_m}\lambda,$$

d. h. mit der Fachlänge λ verhältnisgleich. Nennt man aber die Länge der Strebe d, so ist $\cos \delta = \lambda : d$, und es wird

$$D_{max} = \frac{p l}{8}\frac{d}{h_m}, \text{ und}$$

1) $$D_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{p l}{8}\frac{d}{h_m}.$$

D. h. die größten Strebenkräfte sind mit den Längen der Streben verhältnisgleich.

Will man nur Zugstreben haben, so müssen in allen Fachen gekreuzte Streben angebracht werden, deren stärkste Zugkräfte dann sämmtlich nach Gl. 1 zu berechnen sind.

---

*) Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl., 1. Bd., S. 238.

In der Trägermitte sind die Strebenkräfte etwa ebenso grofs wie beim Parallelträger; während aber bei diesem die Strebenkräfte nach den Auflagern hin beträchtlich zunahmen, werden sie hier nach den Enden hin noch kleiner.

Beim parabolischen Fachwerkbalken erfordern hiernach die Gurten mehr Material, die Streben aber weniger als beim Parallelträger.

Denkt man sich verschiedene Fachwerkbalken gleicher Spannweite, gleicher Höhe in der Mitte, sämmtlich mit geradem Untergurt, aber mit verschieden geformtem Obergurt, so ist unter diesen der parabolische Träger in so fern ein Grenzfall, als bei ihm (unter voller Belastung) die wagerechte Gurtkraft H überall gleichen Werth hat. Bei allen Trägern, deren Obergurte oberhalb der Parabel liegen, nimmt das Biegungsmoment schneller ab als die Trägerhöhe; in Folge dessen wird H nach den Auflagern hin kleiner, und zugleich müssen Haupt-Zugstreben nach der Mitte hin abfallen. Bei Trägern aber, deren Obergurte unterhalb der Parabel liegen, wird H nach den Auflagern hin gröfser, und Haupt-Zugstreben müssen nach der Mitte hin ansteigen.

VI. Der Schwedler'sche (hyperbolische) Träger.

Beim parabolischen Fachwerke sind die Strebenkräfte so klein wie möglich; zugleich sind in allen Fachen gekreuzte Zugstreben erforderlich. Der jetzt zu behandelnde Balken erfüllt die Bedingung, die Gegenstreben in allen Fachen zu vermeiden, dabei aber die Strebenkräfte nicht unnöthig grofs werden zu lassen. Diese Bedingung lautet offenbar, wenn man nur eine Strebe in jedem Fache sich denkt,

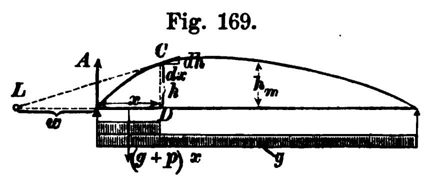
1) $$D_{min} = 0\,,$$

weil dadurch ein negatives D, welches eine Gegenstrebe veranlassen würde, gerade noch vermieden wird. Die interessanten Eigenschaften dieser vom Wirkl. Geh. Oberbaurath Schwedler (Berlin) erdachten Balkenform sind am klarsten zu überblicken, wenn man sie nicht an dem unstetigen Fachwerke, sondern an einem stetigen Vollwandträger entwickelt; die entsprechende Bedingung heifst dann

2) $$Y_{min} = 0.$$

Man denke sich zunächst einen Vollwandträger beliebiger (noch unbestimmter) Gurtform, führe im Abstande x von A einen Schnitt, lege Tangenten an die Schnittstellen der Gurten, welche sich in L, in einem Abstande w von A, schneiden mögen. Die in Fig. 169 angedeutete einseitige Belastung ist nach S. 122 diejenige, welche Y_{min} entspricht. Soll nun dieses $Y_{min} = 0$ sein, so wird die Momentensumme der innern Kräfte am linksseitigen Abschnitt in Bezug auf L gleich Null, so dass die äufseren Kräfte A und $(g+p)\,x$ ebenfalls die Momentensumme Null liefern müssen; oder die resultirende äufsere Kraft R muss durch den Drehpunkt L gehen. (Würde R rechts von L bleiben, so entstände ein positives Y_{min}, und umgekehrt.) Es ergiebt sich hiernach die Gleichung

Fig. 169.



$$A w = (g+p)\,x\left(w + \frac{x}{2}\right).$$

Nun ist aber $\quad A = \frac{g l}{2} + p x - \frac{p x^2}{2 l};$

führt man dies ein und setzt noch zur Abkürzung das Lastverhältnis

3) $$g : p = n,$$

so ergiebt die Auflösung nach w:

4) $$w = \frac{(1+n)\,x^2\,l}{n\,(l^2 - 2\,l\,x) - x^2}.$$

Der Abstand des Drehpunktes L von der Schnittstelle wird dann

$$w + x = \frac{l\,x^2 - n\,l\,x^2 + n\,l^2\,x - x^3}{n\,(l^2 - 2\,l\,x) - x^2} = \frac{x\,(l-x)\,(x+n\,l)}{n\,(l^2 - 2\,l\,x) - x^2}.$$

Um daraus die Trägerform zu finden, lasse man an der Schnittstelle x um $d\,x$ wachsen, dann wächst die Trägerhöhe h daselbst um dh. Bei C entsteht ein kleines rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $d\,x$ und $d\,h$, welches ähnlich ist dem grofsen Dreiecke $L\,C\,D$. Daher wird

$$\frac{d\,h}{h} = \frac{d\,x}{w+x} = \frac{n\,(l^2 - 2\,l\,x) - x^2}{x\,(l-x)\,(x+n\,l)}\,d\,x.$$

Behufs der Integration dieser Differentialfunktion des Schwedler-Trägers muss die rechte Seite in Theilbrüche zerlegt werden, wonach man erhält

$$\frac{dh}{h} = \frac{dx}{x} - \frac{dx}{l-x} - \frac{dx}{x+nl}, \text{ mithin}$$

$$\mathrm{l}\,h = \mathrm{l}\,x + \mathrm{l}\,(l-x) - \mathrm{l}\,(x+nl) + \mathrm{l}\,C \quad \text{oder}$$

$$h = \frac{x\,(l-x)}{x+nl}\,C.$$

Führt man zur Beseitigung der Integrations-Konstanten die Trägerhöhe h_m in der Mitte ein ($x = \frac{1}{2}\,l$; $h = h_m$), so erhält man leicht

$$5) \qquad h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x\,(l-x)\,\frac{\frac{1}{2}+n}{\frac{x}{l}+n}.$$

Fehlte der letzte Bruch auf der rechten Seite, so wäre Gl. 5 die Gleichung des parabolischen Trägers (S. 123). Da nun

$$\frac{\frac{1}{2}+n}{\frac{x}{l}+n} \gtrless 1 \text{ für } \frac{x}{l} \lessgtr \frac{1}{2},$$

so ist die nach Gl. 5 berechnete Trägerhöhe links von der Mitte gröfser, rechts aber kleiner als die des entsprechenden parabolischen Trägers. Einem der Gurte kann man beliebige Form geben; den bisherigen Ausführungen entsprechend, möge der Untergurt gerade gewählt werden, so dass dann Gl. 5 ohne Weiteres die Gleichung des Obergurtes ist.

Nach vorstehenden Bemerkungen ist die nach Gl. 5 bestimmte Trägerform unsymmetrisch zur Trägermitte. Die Höhe h_m in der Mitte ist daher nicht die gröfste, vielmehr liegt diese auf der linksseitigen Hälfte. Um ihre Lage zu finden, setze man $dh : dx = 0$ oder

$$0 = \left(\frac{x}{l} + n\right)(l - 2\,x) - x\,(l-x)\,\frac{1}{l}.$$

Dieser Gl. entspricht ein Werth $x = x_0$, wo

$$6) \qquad x_0 = n\,l\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) = \frac{g}{p}\,l\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{p}{g}}\right).$$

Dieser Werth wurde schon auf S. 76 für diejenige Stelle gefunden, an welcher $Q_{x\,min} = 0$ ist, wo also beim Parallelträger die kleinste Wandscheerkraft $Y_{min} = 0$ sein würde. Auch durch einfache Ueberlegung findet man, dass an dieser Stelle die gröfste Höhe des Schwedler-Trägers liegen muss: Für $x = x_0$ trifft nämlich der Umstand ($Y_{min} = 0$) beim Parallelträger zu, welcher beim Schwedler-Träger durchweg gilt; es muss daher an dieser Stelle der letztere Träger mit dem Parallelträger übereinstimmen, d. h. seine Gurten müssen hier ebenfalls parallel sein.

Setzt man den Werth $x = x_0$ nach Gl. 6 in Gl. 5 ein, so entsteht nach geeigneter Zusammenziehung

$$7) \qquad h_{max} = 4\,h_m\,(1/_2 + n)\,(1 + 2\,n - 2\sqrt{n + n^2})\,.$$

Ordnet man Gl. 5 nach Potenzen von x und h, so erhält man

$$(2 + 4\,n)\,h_m\,x^2 + 0 \cdot h^2 + l\,x\,h - (2 + 4\,n)\,h_m\,l\,x + n\,l^2\,h = 0;$$

dies ist für endliche Werthe von n die Gleichung einer Hyperbel, weil

$$(2 + 4\,n)\,h_m \cdot 0 - 1/_4\,l^2 < 0\,.$$

Die eine Asymptote derselben steht lothrecht und liegt um $n\,l$ links von der Spannweite; die zweite Asymptote schneidet die Spannweite $A\,B = l$ in einem Abstande $n\,l$ rechts von B und trifft die erste Asymptote in der Höhe $2\,h_m(1 + 2\,n)^2$.

In dem Gesetze des hyperbolischen Trägers sind der Parabel- und der Dreiecks-Träger als Sonderfälle enthalten:

1) Für $n = g/_p = \infty$, also $p/_g = 0$ wird Gl. 5 zu

$$h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x\,(l - x)\,,$$

d. h. zur Gleichung des parabolischen Trägers; die gröfste Höhe liegt nun in der Mitte, es wird $h_{max} = h_m$. (Der Ausdruck $(-n + \sqrt{n + n^2})$ in Gl. 6 wird nämlich für $n = \infty$ zu $1/_2$.) Dieser Uebergang zum parabolischen Träger folgt auch aus einfacher Ueberlegung ohne jede Rechnung. Wird nämlich $p/_g = 0$, verschwindet also die bewegliche Last p gegen die ständige Belastung g, so ist einseitige Belastung mit p links vom Schnitt übereinstimmend mit nur ständiger Belastung der ganzen Spannweite, und der Bedingung $Y = 0$ für diesen Belastungsfall entspricht ja bekanntlich der parabolische Träger (S. 123). Je gröfser n wird, je mehr die ständige Belastung gegen die be-

wegliche überwiegt (bei großer Spannweite), desto mehr nähert sich die Hyperbel der Gl. 5 einer Parabel, desto näher rückt die Stelle der größten Trägerhöhe der Mitte der Spannweite.

2) Ist dagegen (bei sehr kleiner Spannweite) $n = g/_p = 0$, so wird Gl. 5 zu

$$h = 2\,h_m \frac{l - x}{l},$$

Fig. 170.

dargestellt durch Fig. 170.

Die **Gurten** haben bei ungünstigster (voller) Belastung mit $g + p = q$ das Moment $^1/_2\,q\,x\,(l - x)$ aufzunehmen. Für die größte wagerechte Seitenkraft der Gurten $H = U = O \cos \omega$ gilt daher

$$H h \quad \text{oder} \quad H \frac{4\,h_m}{l^2} x\,(l - x) \frac{^1/_2 + n}{^x/_l + n} = {}^1/_2\,q\,x\,(l - x);$$

8) $$\text{das giebt} \quad H = U = O \cos \omega = \frac{q\,l^2}{8\,h_m} \frac{^x/_l + n}{^1/_2 + n}.$$

H ist hiernach eine lineare Funktion von x. Für

$$n = 0 \quad \text{wird} \quad H = \frac{q\,l^2}{8\,h_m} \frac{2\,x}{l} = \frac{q\,l}{4\,h_m} x,$$

$$n = {}^1/_2 \quad \text{wird} \quad H = \frac{q\,l^2}{8\,h_m}\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right),$$

$$n = \infty \quad \text{wird} \quad H = \frac{q\,l^2}{8\,h_m} \quad \text{(s. Fig. 171)}.$$

Fig. 171.

Die **Wandscheerkraft** erreicht ihren größten Werth Y_{max}, wenn, außer ständiger Belastung der ganzen Spannweite, das Stück $l - x$ rechts vom Schnitte noch mit p belastet ist. Dieses Y_{max} könnte man unmittelbar berechnen mittels der Momentengleichung in Bezug auf den Drehpunkt L, dessen Lage ja mit Hülfe der Gl. 4 (S. 182) bekannt ist. Die Rechnung wird aber vereinfacht durch folgende Betrachtung:

Für jede Belastung gilt (nach Gl. 4, S. 120):

$$Y = h \frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{d\,x}.$$

Nun ist für Belastung der ganzen Spannweite mit p (nach Gl. 8, S. 185)

$$\frac{M}{h} = H = \frac{p\,l^2}{8\,h_m} \frac{^x/_l + n}{^1/_2 + n},$$

also

$$\frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{dx} = \frac{p\,l}{8\,h_m}\,\frac{1}{{}^1/_2 + n},$$

mithin die Wandscheerkraft für diese Belastungsart

$$9) \qquad Y_p = \frac{p\,l}{4\,h_m}\,\frac{h}{1 + 2\,n}.$$

Es setzt sich aber Y_{max} zusammen aus Y_g (entsprechend nur ständiger Belastung) und dem Einflusse der einseitigen Belastung rechts mit p, was wir schreiben wollen

$$Y_{max} = Y_g + Y_{rp}. \quad \text{Ebenso ist}$$
$$Y_{min} = 0 = Y_g + Y_{lp},$$

in so fern die kleinste Wandscheerkraft (deren Größe ja Null) aus Y_g und dem Einflusse einer einseitigen Belastung links mit p entsteht. Zählt man beide Gleichungen zusammen, so wird (weil $Y_{rp} + Y_{lp}$ einer Belastung der ganzen Spannweite mit p entspricht, also gleich Y_p ist)

$$Y_{max} = 2\,Y_g + Y_p = Y_p\left(2\,{}^g/_p + 1\right) = Y_p\,(2\,n + 1)$$

oder mit Hülfe von Gl. 9:

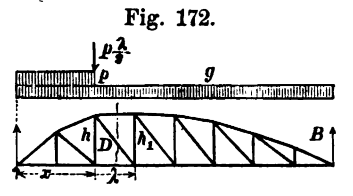
$$10) \qquad Y_{max} = \frac{p\,l}{4\,h_m}\,\frac{h}{1 + 2\,n}\,(2\,n + 1) = \frac{p\,l}{4}\,\frac{h}{h_m}.$$

Hiernach ist, wie beim parabolischen Träger (S. 125) die größte Wandscheerkraft nur von p, nicht von g, abhängig und ebenfalls verhältnisgleich mit der Trägerhöhe h an der betreffenden Schnittstelle. Während die Wandscheerkraft beim parabolischen Träger zwischen $-\frac{p\,l}{8}\,\frac{h}{h_m}$ und $+\frac{p\,l}{8}\,\frac{h}{h_m}$ schwankt, bewegt sie sich beim hyperbolischen Träger zwischen 0 und $\frac{p\,l}{4}\,\frac{h}{h_m}$.

Der Schwedler'sche Fachwerkbalken. Es ist nun aus dem hyperbolischen Vollwandträger der Bedingung $Y_{min} = 0$ der eigentliche, in Fachwerk ausgebildete Schwedler-Träger mit der Bedingung $D_{min} = 0$ abzuleiten. Geht man dabei von ständiger Last g und beweglicher Last p aus, welche durch Zwischenträger auf die Knotenpunkte eines Ständer-Fachwerks übertragen werden und schiebt man bei einseitiger Belastung wiederum, wie in Fig. 168, S. 180 dargestellt, die Last nur bis an das durch-

schnittene Fach vor, indem man aber gleichzeitig am Vorderende der Last eine Einzelkraft $\frac{1}{2} p \lambda$ hinzufügt, so zeigt sich, dass die Gleichungen des hyperbolischen Trägers nicht nur annähernd, sondern genau auf das Fachwerk übertragen werden können.

Fig. 172.



In Fig. 172 ist diejenige Belastungsart gezeichnet, welche dem kleinsten Werthe D_{min} der durchschnittenen Strebe in einem beliebigen Fache entsprechen würde. Es ist dann das Moment in Folge der ständigen Belastung g

bei x: $\quad M_x = \frac{1}{2} g x (l - x)$

bei $x + \lambda$: $\quad M_{x+\lambda} = \frac{1}{2} g (x + \lambda)(l - x - \lambda)$.

Durch die bewegliche Last allein entsteht der rechtsseitige Auflagerdruck

$$B_p = \frac{p x^2}{2 l} + \frac{p \lambda}{2} \frac{x}{l} = \frac{p x (x + \lambda)}{2 l}.$$

In Folge beider Belastungen wird nun für den unteren Endpunkt der Strebe

$$\left(\frac{M}{h}\right)_u = \frac{B (l - x - \lambda) + \frac{1}{2} g (x + \lambda)(l - x - \lambda)}{h_1}$$

und für ihren oberen Endpunkt

$$\left(\frac{M}{h}\right)_o = \frac{B (l - x) + \frac{1}{2} g x (l - x)}{h},$$

wenn h und h_1 die Trägerhöhen zu beiden Seiten des durchschnittenen Faches sind. Nach der Bedingung des Schwedler-Trägers soll nun $D_{min} = 0$ sein, also auch nach Gl. 2, S. 172

$$D_{min} \cos \delta = \left(\frac{M}{h}\right)_u - \left(\frac{M}{h}\right)_o = 0;$$

daraus folgt mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{h_1}{h} = \frac{B (l - x - \lambda) + \frac{1}{2} g (x + \lambda)(l - x - \lambda)}{B (l - x) + \frac{1}{2} g x (l - x)},$$

oder nach Einführung des Werthes von B und nach Zusammenziehung

$$\frac{h_1}{h} = \frac{(x + \lambda)(l - x - \lambda)(n + x/l)}{x (l - x)\left(n + \frac{x + \lambda}{l}\right)}.$$

Dieser Bedingung muss der Fachwerkbalken entsprechen, damit $D_{min} = 0$ sei. Berechnet man aber h und h_1 aus Gl. 5 (S. 183), so ergiebt sich dasselbe. Daher kann Gl. 5 zur Berechnung der einzelnen Ständerhöhen des Trägers benutzt werden; der Obergurt wird dann ein Sehnenvieleck der Hyperbel.

Die gröfste Kraft der Streben D_{max} finden wir nach dem Vorgange der Berechnung von Y_{max} (Gl. 10). Für Belastung der ganzen Spannweite mit p ist nach Gl. 8 (S. 185)

$$\left(\frac{M}{h}\right)_o = H = \frac{p\,l^2}{8\,h_m}\,\frac{x + n\,l}{{}^1\!/_2\,l + n\,l},$$

daraus
$$\left(\frac{M}{h}\right)_u = \frac{p\,l^2}{8\,h_m}\,\frac{x + \lambda + n\,l}{{}^1\!/_2\,l + n\,l},$$
daher

$$D_p \cos\delta = D_p\,\frac{\lambda}{d} = \left(\frac{M}{h}\right)_u - \left(\frac{M}{h}\right)_o = \frac{p\,l}{8\,h_m}\,\frac{\lambda}{{}^1\!/_2 + n},$$
oder

$$D_p = \frac{p\,l}{4\,(2\,n + 1)}\,\frac{d}{h_m},$$

wenn d die Länge der Strebe. Nun ist

$$\begin{aligned} D_{max} &= D_g + D_{r\,p} \\ D_{min} = 0 &= D_g + D_{l\,p} \\ \hline D_{max} &= 2\,D_g + D_p = D_p\,(2\,n + 1), \end{aligned}$$
folglich

$$D_{max} = \frac{p\,l}{4}\,\frac{d}{h_m}, \tag{11}$$

d. h. die gröfsten Strebenkräfte sind mit den Strebenlängen verhältnisgleich. (Für L o k o m o t i v - Belastung werden die Form- und Spannungs-Verhältnisse verwickelter.)

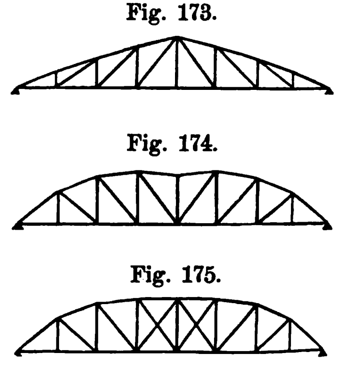


Fig. 173.

Fig. 174.

Fig. 175.

Symmetrische Anordnung des Balkens. In Folge der Art der Herleitung haben wir einen zur Mitte unsymmetrischen Balken erhalten, dessen Zugstreben sämmtlich nach rechts abfallen. Daraus lassen sich nun zwei verschiedene symmetrische Formen ableiten, indem man entweder die linksseitige oder die rechtsseitige Hälfte symmetrisch wiederholt. Bei Fig. 174 liegt der Obergurt ganz o b e r h a l b einer Parabel der Pfeilhöhe h_m,

weshalb (nach S. 181) die wagerechte Gurtkraft nach den Auflagern hin abnimmt und Zugstreben nach der Mitte abfallen müssen, während bei Fig. 173 das Gegentheil stattfindet. Letztere Anordnung wird nicht benutzt, weil die Gurten nach den Auflagern hin zu schwer werden. Aber auch die Anordnung nach Fig. 174 hat man ihrer unschönen Form wegen nicht ausgeführt, sondern hat in dem mittleren Theile, in welchem die Gurten nach der Mitte zu sich senken müssten, das Mittelstück eines Parallelträgers eingelegt. Dadurch sind nun für dieses eingeschobene Stück die kennzeichnenden Eigenschaften des hyperbolischen Trägers aufgegeben und in demselben gekreuzte Zugstreben erforderlich geworden (Fig. 175).

VII. Unmittelbare Berechnung der Stabkräfte eines abgestumpften Parabelträgers (Halb-Parabelträgers).

In den vorstehenden Kapiteln wurden die Eigenschaften einiger bemerkenswerthen Trägerformen behandelt; jedoch sind derartige Untersuchungen für die Berechnung bestimmter Beispiele keineswegs erforderlich, vielmehr kann diese leicht unmittelbar mit Hülfe der Momenten-Gleichungen erfolgen. Ein solches Rechnungs-Beispiel soll im Folgenden durchgeführt werden, u. zw. wählen wir dazu einen s. g. Halb-Parabelträger, der sich von dem eigentlichen parabolischen Balken dadurch unterscheidet, dass die Trägerhöhe an den Auflagern nicht Null ist, sondern dass der parabolisch geknickte Obergurt in einer Höhe h_0 über dem geraden Untergurt endigt. Nach diesem Beispiele lassen sich dann auch Träger von weniger einfacher Form berechnen.

Die Spannweite sei durch Ständer in 8 Fache getheilt (Fig. 176), dann ist, wenn man die untereren Knotenpunkte mit 0 bis 8 numerirt, h_4 die gröfste Trägerhöhe, und in einem Abstande x vom linken Auflager gilt für die Trägerhöhe h_x nach der Parabel-Gleichung die Formel

Fig. 176.

$$h_x - h_0 = \frac{4\,(h_4 - h_0)}{l^2}\, x\,(l - x)\,.$$

Wir wählen nun die Fachlänge λ zur Einheit, so dass $l = 8$

wird, und nehmen noch $h_4 = \lambda = 1$ und $h_o = 1/2$ an, so dass die Trägerform nun ganz bestimmt ist; dann wird

$$h_x = 0{,}5 + {}^1/_{32}\, x\,(8 - x)\,,$$

worin x natürlich nur die Werthe ganzer Zahlen 1, 2, 3 haben kann.

Da die Fachlänge = 1, so wird $\operatorname{tg} \delta_1 = h_o$, $\operatorname{tg} \delta_2 = h_1$ u. s. f. Ebenso wird $\operatorname{tg} \omega_1 = h_1 - h_o$ u. s. f., und alle zunächst wichtigen Größenverhältnisse finden sich in folgender Tabelle:

$h_o = \operatorname{tg} \delta_1 = 0{,}5$		
	$h_1 - h_o = \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$	
$h_1 = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{23}{32} = 0{,}71875$		$-\frac{2}{32} = -0{,}0625$
	$h_2 - h_1 = \operatorname{tg} \omega_2 = \frac{5}{32} = 0{,}15625$	
$h_2 = \operatorname{tg} \delta_3 = \frac{28}{32} = 0{,}875$		$-\frac{2}{32} = -0{,}0625$
	$h_3 - h_2 = \operatorname{tg} \omega_3 = \frac{3}{32} = 0{,}09375$	
$h_3 = \operatorname{tg} \delta_4 = \frac{31}{32} = 0{,}96875$		$-\frac{2}{32} = -0{,}0625$
	$h_4 - h_3 = \operatorname{tg} \omega_4 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$	
$h_4 = \operatorname{tg} \delta_5 = 1{,}0$		

Dass die zweiten Differenzen durchweg denselben Werth $-0{,}0625$ haben, rührt von der Parabelgestalt des Obergurts her.

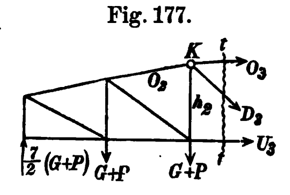
Jeder mittlere Knotenpunkt des Untergurts trage eine ständige Last G, eine bewegliche Last P, u. zw. sei $G = {}^1/_5\, P$, also $G = {}^1/_6\,(G + P)$, $P = {}^5/_6\,(G + P)$. (Belastungen der Knotenpunkte 0 und 8 werden unmittelbar von den Auflagern aufgenommen.)

Da der Halb-Parabelträger zwischen Parallel- und Parabelbalken liegt, so muss nach S. 181 für volle Belastung die wagerechte Kraft der Gurten nach den Enden hin abnehmen, nur nicht so stark wie beim Parallelträger. Es sollen nur **Zugstreben** angeordnet werden, diese müssen vorwiegend nach der Mitte abfallen, doch wird eine gewisse Zahl von Mittelfachen auch Gegenstreben erfordern. Damit aber diese letzteren die Uebersicht nicht stören, nimmt man bei der Berechnung zunächst nur nach rechts fallende Streben an, untersucht, nach rechts fortschreitend, wie weit man für diese noch positive Spannkräfte bekommt, und lässt sie darüber hinaus fort; die so berechnete Strebenschar wird dann symmetrisch wiederholt.

Die Gurtkräfte werden auf volle Belastung aller 7 Lastpunkte mit $G + P$ berechnet, wobei jeder Auflagerdruck ${}^7/_2\,(G + P)$

beträgt. Um beispielsweise U_3 im dritten Fache des Untergurts zu berechnen (Fig. 177), führt man einen Schnitt tt und wählt den Schnittpunkt K der beiden mitgetroffenen Stäbe O_3 und D_3 zum Drehpunkte, so dass letztere keine Momente erhalten. Dann hat man die Momentengleichung

Fig. 177.



$$0 = -U_3 h_2 + {}^7/_2 (G + P) \cdot 2 - (G + P) \cdot 1 ,$$

also, weil $h_2 = 0{,}875$,

$$U_3 = \frac{6}{0{,}875} (G + P) = 6{,}857 (G + P) .$$

Zur Berechnung desjenigen Stabes O_2 des Obergurts, welcher mit U_3 zwischen denselben Hauptstreben liegt, ist der untere Knotenpunkt 2 als Drehpunkt zu erwählen; in Bezug auf diesen ist aber das Biegungsmoment das gleiche, wie bezüglich des Punktes K, so dass auch das Widerstandsmoment denselben Werth haben muss. Der Hebelarm von O_2 ist aber $h_2 \cos \omega_2$, die Drehungsrichtung einer Zugkraft O_2 rechts herum, während U_3 links drehte, mithin wird $O_2 \cos \omega_2 h_2 = - U_2 h_2$ oder $O_2 = - U_2 \sec \omega_2$. Nun ist $\sec \omega_2$ das Verhältnis der Länge des Obergurtstückes zur Länge seiner wagerechten Projektion, daher aus einer sorgfältigen Zeichnung leicht abzugreifen; jedoch kann man auch $\sec \omega_2 = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \omega_2} = \sqrt{1 + 0{,}15625^2} = 1{,}01154$ berechnen und erhält $O_2 = - 6{,}936 (G + P)$.

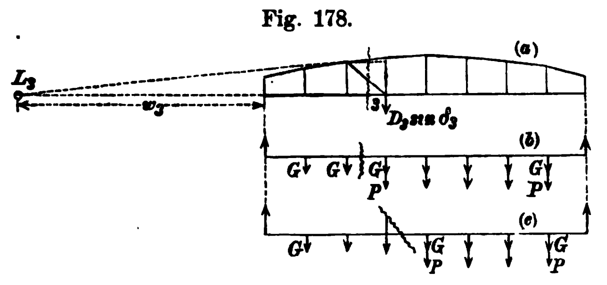
Für alle Gurtstücke bis zur Mitte erhält man in gleicher Weise:

$U_1 = 0$	
$U_2 = 4{,}870 (G + P)$	$O_1 = - 4{,}983 (G + P)$
$U_3 = 6{,}857 (G + P)$	$O_2 = - 6{,}936 (G + P)$
$U_4 = 7{,}742 (G + P)$	$O_3 = - 7{,}776 (G + P)$
	$O_4 = - 8{,}004 (G + P)$

Die Streben werden auf einseitige Belastung berechnet. Bei der Bestimmung von D_3 hat man den Schnittpunkt L_3 von O_3 und U_3 zum Drehpunkte zu wählen (Fig. 178). Zur Ermittelung seines Abstands w_3 vom linken Auflager führt leicht die Verhältnis-Gleichung $(w_3 + 2) : h_2 = 1 : (h_3 - h_2)$; das giebt $w_3 = 7\,{}^1/_3$. Zerlegt man D_3 am Punkte 3, so wird $D_3 \sin \delta_3 (w_3 + 3)$ das innere Moment bezüglich des Punktes L_3, u. zw. findet man

$\sin \delta_3$ am einfachsten, indem man das gegebene $\operatorname{tg} \delta_3 = 0{,}875$ in der Tangenten-Spalte einer trigonometrischen Tafel aufsucht und in derselben Reihe $\sin \delta_3 = 0{,}6585$ in der Sinus-Spalte abliest. Für D_{3max} ist die in Fig. 178 (b) gezeichnete Belastung maßgebend, wobei $A = {}^7/_2\, G + {}^{15}/_8\, P$ wird. Dann erhält man die Momentengleichung

Fig. 178.



$$0 = D_3 \sin \delta_3 \cdot 10\,{}^1/_3 - A \cdot 7\,{}^1/_3 + 2\, G\, 8\,{}^5/_6\,.$$

(Wir schreiben in diesen Gleichungen stets zuerst die gesuchte Spannkraft, dann den Auflagerdruck und endlich die Lasten links vom Schnitt an, welche letzteren wir sogleich mit ihrer Mittelkraft einführen.)

Daraus ergiebt sich

$$D_{3max} = 1{,}175\, G + 2{,}020\, P.$$
$$= 1{,}8792\,(G + P) \begin{pmatrix} \text{wegen } G = {}^1/_6\,(G+P) \\ \text{und } P = {}^5/_6\,(G+P) \end{pmatrix}.$$

D_{3min} entsteht bei einseitiger Belastung links vom Schnitte, braucht aber nicht besonders berechnet zu werden, sondern folgt aus D_{3max}. Schreibt man nämlich

$$D_{3max} = \alpha\, G + \beta\, P\,,$$
$$D_{3min} = \alpha\, G + \gamma\, P$$

(mit Rücksicht darauf, dass ja die ständige Last in beiden Fällen dieselbe ist und deshalb auch gleichen Einfluss üben muss), so stellt β den Beitrag von 5 rechtsseitigen, γ den Beitrag von 2 linksseitigen Lasten der Gröfse Eins dar; $\beta + \gamma$ ist daher der Einfluss aller 7 Lasten (von der Gröfse Eins) auf D, und weil α dasselbe bedeutet, so muss $\beta + \gamma = \alpha$ oder

1) $$\gamma = \alpha - \beta \quad \text{sein.}$$

Hier wird $\gamma = 1{,}175 - 2{,}020 = -0{,}845\,,$

mithin $D_{3min} = 1{,}175\, G - 0{,}845\, P = -0{,}5083\,(G + P)\,.$

Die hier sich ergebende Druckkraft hat für einen Träger mit reinen Zugstreben freilich keine Bedeutung; wir erkennen daraus nur, dass

in dem dritten Fache schließlich eine Gegenstrebe vorhanden sein muss, welche die Hauptstrebe von dem Drucke befreit. Mit Rücksicht darauf wird dann thatsächlich $D_{3\,min} = 0$ sein.

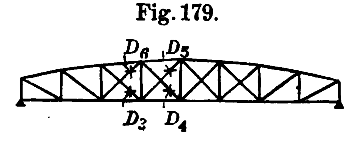
Berechnet man in gleicher Weise die übrigen Streben, von links beginnend, so erhält man für $D_{1\,min}$ und $D_{2\,min}$ noch positive Werthe; in diesen Streben kommt also nur ein der Größe nach wechselnder Zug vor, und Gegenstreben werden in den ersten beiden Fachen nicht erforderlich. — Für D_4, D_5 u. s. w. braucht man nur die Maximalwerthe auszurechnen, wie in Bezug auf D_3 erläutert. Man erhält dann $D_{6\,max} = 0{,}53\,(G + P)$,

$$D_{7\,max} \text{ aber } = -0{,}041\,(G + P)$$

und erkennt aus dem negativen Zeichen des letzteren Werthes, dass im siebenten Fache eine rechtsfallende Zugstrebe nicht mehr vorkommt.

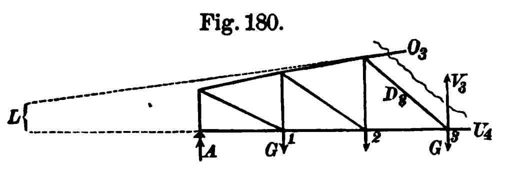
Wiederholt man nun die Streben D_1 bis D_6 symmetrisch von rechts aus, so hat man die beiden Strebenscharen richtig in der Figur und erkennt z. B. (Fig. 179), dass im dritten Fache neben der Hauptstrebe mit der Kraft $D_3 = 1{,}8792\,(G + P)$ noch eine Gegenstrebe mit der Kraft $D_6 = 0{,}53\,(G + B)$ vorkommt.

Fig. 179.



Die Ständer berechnen wir zunächst unter Annahme nach rechts fallender Streben. Führen wir beispielsweise durch V_3 (Fig. 180) einen schrägen Schnitt, so ist der Schnittpunkt von O_3 und U_4 zum Drehpunkte L zu wählen; dies ist wiederum L_3 wie in Fig. 178 mit dem Abstande $w_3 = 7\,^1/_3$ von A. Für $V_{3\,min}$ haben wir einseitige Belastung der Knotenpunkte 4 bis 7 mit P anzunehmen (s. Fig. 178, c) und erhalten $A = {}^7/_2\,G + 4 \cdot {}^5/_{16}\,P$. Dann wird die Momentengleichung

Fig. 180.



$$0 = -V_3 \cdot 10\,^1/_3 - A \cdot 7\,^1/_3 + 3\,G \cdot 9\,^1/_3 \quad \text{und}$$

$$V_{3\,min} = 0{,}226\,G - 0{,}887\,P = -0{,}7023\,(G + P) \quad \text{(Druck).}$$

Setzt man wieder

$$V_{3\,min} = \alpha\,G + \beta\,P, \qquad V_{3\,max} = \alpha\,G + \gamma\,P,$$

so muss $\gamma = \alpha - \beta = 0{,}226 + 0{,}887 = 1{,}113$ sein,
mithin $V_{3\,max} = 0{,}226\,G + 1{,}113\,P = 0{,}9652\,(G + P)$.

In gleicher Weise berechnet man die übrigen Ständer vom Auflager bis zur Mitte.

Einfluss der Gegenstreben auf die berechneten Spannkräfte. Die stärksten Gurtkräfte werden durch die Hinzufügung der Gegenstreben nicht beeinflusst, denn bei voller Belastung, die für die Gurten maſsgebend ist, sind die Gegenstreben spannungslos.

Die Hauptstreben behalten ihre gröſste Zugkraft, weil bei der hierfür maſsgebenden Belastung die Gegenstrebe des betreffenden Faches spannungslos ist. Statt etwa berechneter Druckkräfte tritt aber, wie schon S. 193 erwähnt, die Spannkraft Null ein.

Für die Ständer bleiben die berechneten Druckkräfte bestehen; denn bei der beispielsweise für $V_{3\,min}$ maſsgebenden Belastung rechts vom Schnitte werden in den beiden Fachen links und rechts von V_3 (Fig. 180) die nach rechts fallenden Streben gespannt, so dass etwa noch vorhandene Streben entgegengesetzter Richtung spannungslos sind.

Die Zugkräfte der Ständer aber können durch die Hinzufügung der Gegenstreben eine Verminderung erfahren. Für $V_{3\,max}$ ist z.B. (Fig. 180) eine einseitige Belastung der Knotenpunkte 1 bis 3 zu Grunde gelegt. Diese würde aber in der Strebe D_4 Druck erzeugen, so dass nun die mit D_4 sich kreuzende Strebe D_5 (Fig. 179) in Zugspannung kommt, und das Hinzutreten dieser Stabkraft macht die für $V_{3\,max}$ ausgeführte Berechnung ungültig. Aus. Fig. 181 erkennt man aber auch, dass das Hinzutreten einer neuen Zugstrebe D' immer nur eine Verminderung der Zugkraft V herbeiführen kann, weil sich

Fig. 181.

2) $$V = G + P - D \sin\delta - D' \sin\delta'$$ ergiebt.

Eine genauere Untersuchung zeigt,*) dass bei dem Vorhandensein von Gegenstreben die für V_{max} maſsgebende Be-

*) Siehe Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl., 1. Bd., S. 275. — G. Lang, Berechnung der Eisenbauten; Rigasche Industrie-Zeitung 1887, S. 173/5. Die Abhandlung giebt auch allgemeine Formeln für die Grenzspannkräfte beliebiger Fachwerkbalken. — H. C. Hansen, die stärkste Zugkraft in einem Ständer eines Fachwerkbalkens mit schlaffen gekreuzten Streben; Deutsche Bauzeitung 1892, S. 290.

lastungsart eine völlig andere ist, als vorstehend dafür zu Grunde gelegt war, und dass die genaue Berechnung verhältnismäfsig weitläufig wird. Da nun die Ständer wegen des (richtig gefundenen) Druckes V_{min} auf Zerknicken berechnet werden müssen, so hat es auf die Querschnittsbestimmung meist gar keinen Einfluss, ob man die Zugkraft des Ständers V_{max} mit dem zuerst gefundenen oder aber mit einem kleineren (genaueren) Werthe annimmt. Daher wird man die genauere Untersuchung meist unterlassen.

Bei dem hier vorliegenden Träger mit geradem Lastgurt erkennt man aber aus Fig. 181 und Gl. 2 leicht, dass V nicht gröfser als die Knotenpunktsbelastung $G + P$ werden kann, da Zugkräfte in den Streben immer eine Verminderung von V bewirken, während bei einer Druckkraft D die Spannkraft V auch $> G + P$ sein könnte. Haben sich daher bei der ersten Berechnung von V_{max} theilweise Werthe $> G + P$ ergeben, so kann man dafür annähernd $G + P$ an die Stelle setzen.

Für den Mittelständer ist der genaue Werth von V_{4max} allerdings leicht zu finden; er kommt nämlich vor bei voller Belastung. Führt man unter Annahme einer solchen um die Mitte C des Obergurts einen kreisförmigen Schnitt (Fig. 182), so sind in den beiden Fachen links und rechts von der Mitte nur die Hauptstreben in Spannung, so dass bei C keine Strebenkräfte angreifen. V_4 muss daher mit den Druckkräften O_4 der Gurten im Gleichgewichte, mithin $V_4 = 2\, O_4 \sin\omega_4$ sein, oder, weil

Fig. 182.

$$O_4 = \frac{M_4}{h_4}\frac{1}{\cos\omega_4}, \qquad V_4 = 2\frac{M_4}{h_4}\operatorname{tg}\omega_4 .$$

Das giebt $V_4 = 2 \cdot 8\,(G + P) \cdot 0{,}03125 = 0{,}5\,(G + P)$.

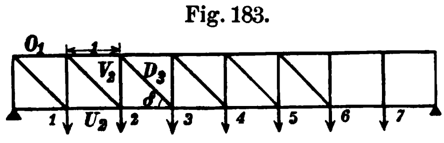
Jede Entlastung des Trägers würde die Druckkräfte O_4 und damit auch die Zugkraft V_4 vermindern, und bei C etwa angreifende Strebenzüge würden auch nur vermindernd auf V_4 einwirken, so dass die volle Belastung thatsächlich für V_{4max} mafsgebend ist.

VIII. Berechnung eines Parallelträgers.

Die allgemeine Anordnung und die Belastung seien dieselben wie bei vorstehend behandeltem Halbparabelträger, nur möge der Obergurt geradlinig durchgeführt werden.

Die **Gurten** werden genau in derselben Weise berechnet, wie beim Halb-Parabelbalken. Diejenigen Stücke des Ober- und Untergurts, welche zwischen denselben Hauptstreben liegen, haben gleiche, aber entgegengesetzte Spannkräfte: es ist $O_1 = - U_2$ u. s. f.

Fig. 183.



Der für die Berechnung der **Streben** zu benutzende Drehpunkt L würde bei diesem Balken in unendlicher Ferne liegen; daher tritt jetzt an Stelle der Momentengleichung in Bezug auf L die Gleichung der lothrechten Kräfte.

Die Momentengleichung bringt nämlich zum Ausdrucke, dass das Trägerstück nicht durch Drehung um L in Bewegung gerathen könne. Eine Drehung um den unendlich fernen Punkt der wagerechten Gurtrichtung ist aber gleichbedeutend mit einer senkrecht fortschreitenden Bewegung; und dass eine solche nicht erfolge, wird durch die Gleichung der lothrechten Kräfte bedingt, welche somit der natürliche Ersatz für die Momentengleichung wird, sobald die Gurten parallel sind. Auch der ursprüngliche Zweck der Momentengleichung, dass die Gurtkräfte aus derselben fortbleiben sollen, wird wieder erreicht, indem die Kräfte der nun wagerechten Gurten in der Gleichung der lothrechten Kräfte ja nicht erscheinen können.

Will man z. B. D_{3max} berechnen, so gilt die in Fig. 178b dargestellte Belastung, es wird $A = {}^7/_2\, G + {}^{15}/_8\, P$ und

$$D_{3max} \sin \delta = A - 2\,G = {}^3/_2\, G + {}^{15}/_8\, P = 1{,}813\,(G + P),$$

sowie

$$D_{3min} \sin \delta = {}^3/_2\, G + ({}^3/_2 - {}^{15}/_8)\, P = {}^3/_2\, G - {}^3/_8\, P = -\, {}^1/_{16}(G + P),$$

wofür Null an die Stelle tritt. In dieser Weise rechnet man weiter, von links nach rechts fortschreitend, solange man überhaupt noch positive Werthe bekommt, und verfährt im Uebrigen, wie beim Halb-Parabelträger gezeigt.

Die **Ständerkräfte** lassen sich ohne Weiteres aus den Strebenkräften ableiten (nach Gl. 1, S. 177). Mit D_3 trifft hier (Fig. 183) V_2 an einem u n b e l a s t e t e n Knotenpunkte zusammen; daher ist $V_2 = - D_3 \sin \delta$ also

$$V_{2min} = - D_{3max} \sin \delta = - {}^3/_2\, G - {}^{15}/_8\, P = - 1{,}813\,(G + P).$$

V_{2max} würde bei Anwendung von Druckstreben $= + {}^1/_{16}\,(G + P)$ werden; bei reinen Zugstreben ist aber ein Zug in den Ständern unmöglich, daher $V_{2max} = 0$ zu setzen. In derselben Weise hat

man alle etwa positiv sich ergebenden Werthe für V mit Null zu vertauschen.

IX. Ungünstigste Stellung eines Lokomotiven-Zuges bei einem einfachen Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

Ein mit mehreren schweren Lokomotiven bespannter Eisenbahnzug bildet für einen Fachwerkträger eine Lastengruppe bestimmter Zusammensetzung, welche als Ganzes gegen den Träger verschieblich ist. Eine schwere Lokomotive hat etwa

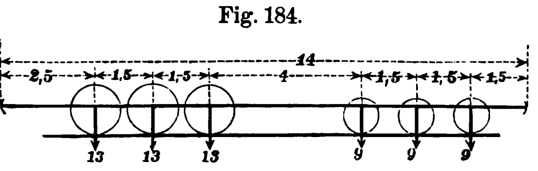


Fig. 184.

die in Fig. 184 dargestellte Anordnung der Achsbelastungen, wobei die (schweren) Triebachsen durch gröſsere, die Tenderachsen durch kleinere Kreise angedeutet sind. Vorder- und Hinterbuffer stehen bei der gezeichneten Anordnung um 2,5 bezw. $1{,}5^{m}$ über die äuſsersten Achsen hinaus.

Auf S. 172—175 wurde nun schon gezeigt, wie man die Lasten ungefähr zu stellen hat, damit in einem Stabe die Spannkraft möglichst groſs werde; wie aber die Zusammendrängung der schwersten Lasten in der Nähe des Drehpunktes (für die Gurten) bezw. des durchschnittenen Stabes (für die Wandglieder) im Besonderen einzurichten sein, muss noch näher untersucht werden, u. zw. kann dies mittels der Einflusslinien geschehen.

Benutzung der Einflusslinien zur Einstellung der Lasten. Nach Fig. 160 und 161 (S. 172 und 174) sind die hier in Frage kommenden Einflussfiguren Dreiecke oder Vierecke. Es lässt sich nun zunächst zeigen, dass die im Gebiete einer und derselben Einfluss-Geraden befindlichen Lasten durch ihre Mittelkraft ersetzt werden können. Sind nämlich in der Einflussstrecke CD (Fig. 185) die Lasten P' und P'' gegeben, so ist deren Gesammt-Einfluss auf die be-

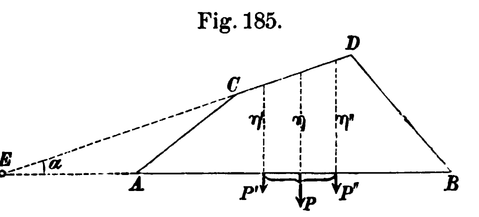


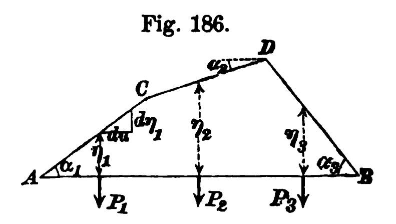
Fig. 185.

treffende Spannkraft (oder sonstige Gröſse, auf die sich die Ein-

flussfigur bezieht) $S = P'\eta' + P''\eta''$. Schneidet aber CD die Gerade AB in E unter einem Winkel α und in den Abständen x' und x'' von den Lasten, so ist $\eta' = x' \operatorname{tg} \alpha$, $\eta'' = x'' \operatorname{tg} \alpha$, mithin $S = \operatorname{tg} \alpha (P'x' + P''x'')$. Für die Momentensumme $P'x' + P''x''$ lässt sich aber nach der Gleichung der statischen Momente das Moment der Mittelkraft Px setzen (wenn P die Mittelkraft von P' und P''), und da $x \operatorname{tg} \alpha = \eta$, so wird $S = P\eta$, d. h. genau so, als ob man es nur mit der Mittelkraft P zu thun hätte.

Sind hiernach die Lasten jeder Einflussstrecke zu Mittelkräften P_1, P_2, P_3 vereinigt (Fig. 186), so ist deren Gesammt-Wirkung $S = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3$. Die Neigungswinkel der Einfluss-Geraden seien α_1, α_2, α_3. Es möge nun die ganze zusammenhängende Lastengruppe um die Strecke du nach rechts verschoben werden, ohne dass dabei eine der ursprünglich gegebenen Einzellasten eine Einflussgrenze A, C, D oder B überschreite; dann bleiben P_1, P_2 und P_3 dieselben, die Einfluss-Ordinaten aber ändern sich vermöge der Verschiebung, und die Gesammtwirkung erleidet eine Zunahme $dS = P_1\,d\eta_1 + P_2\,d\eta_2 + P_3\,d\eta_3$. Hierin ist nach der Figur $d\eta_1 = du \operatorname{tg} \alpha_1$, $d\eta_2 = du \operatorname{tg} \alpha_2$, $d\eta_3 = -du \operatorname{tg} \alpha_3$ (negativ, weil DB nach rechts abfällt). Daher wird

Fig. 186.



1) $$dS = (P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - P_3 \operatorname{tg} \alpha_3)\,du$$

oder bei beliebig vielen Einflussstrecken und wenn man die Neigungen durchweg als nach rechts ansteigend positiv auffasst:

2) $$dS = du\,\Sigma P \operatorname{tg} \alpha.$$

Ist $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha > 0$, so wird eine Verschiebung der Lasten nach rechts eine Vergrößerung von S zur Folge haben, und umgekehrt. Kommt es also darauf an, dass S möglichst groß werde, so muss bei positivem Vorzeichen von $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ die Lastgruppe nach rechts verschoben werden, und umgekehrt. War $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ etwa zu Anfang > 0, so wird bei einer Lastverschiebung nach rechts dieses positive Vorzeichen so lange bestehen bleiben, bis durch Hinübertreten von Einzellasten über die Einfluss-Grenzen und dadurch verursachte Aenderung der Gruppen P_1, P_2 und P_3 die negativen Glieder das Uebergewicht bekommen.

Da nämlich die Winkel α unveränderlich sind, beim Vorhandensein von Einzellasten aber die Gruppen P_1, P_2, P_3 sich nur sprungweise ändern können, so ist es nicht ohne Weiteres möglich, durch Lastverschiebung $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha = 0$ zu machen. Hat aber dieser Werth einen Zeichenwechsel erfahren, so muss die Lastengruppe nun entgegengesetzt verschoben werden. Hiernach wird der Einfluss einer gegebenen Lastgruppe möglichst grofs, wenn diejenige Last, deren Verschiebung über eine Einflussgrenze hinüber einen Zeichenwechsel in dem Werthe $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ hervorbringt, gerade auf diese Einflussgrenze gestellt wird.

Fig. 187.

Ist der positive oder negative Theil der Einflussfigur ein einfaches Dreieck (von der Höhe f), kommen mithin nur zwei Einflussstrecken der wagerechten Längen c_1 und c_2 in Frage, so wird (Fig. 187)

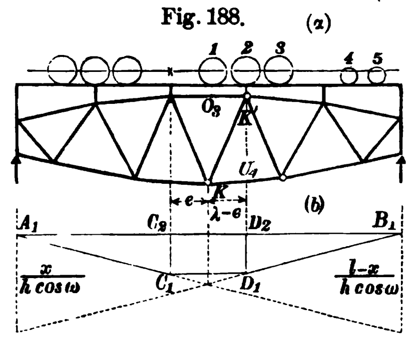
$$3) \qquad \Sigma P \operatorname{tg} \alpha = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = f\left(\frac{P_1}{c_1} - \frac{P_2}{c_2}\right).$$

Da nun P_1 die Gesammtlast der Einflussstrecke c_1, so ist $P_1 : c_1$ die durchschnittliche Belastung der Längeneinheit der Strecke c_1 und $P_2 : c_2$ diejenige der Strecke c_2; um also die ungünstigste Laststellung zu finden, hat man diese beiden durchschnittlichen Belastungen möglichst auszugleichen, und diejenige Last, deren Verschiebung über eine Einflussgrenze hinüber einen Zeichenwechsel in dem Unterschiede der durchschnittlichen Belastungen der beiden Einflussstrecken hervorbringt, muss gerade auf diese Einflussgrenze gestellt werden.

Ungünstigste Laststellung für einen Stab des unbelasteten Gurtes. Da für diesen Fall der Drehpunkt mit einem Lastpunkte zusammenfällt, so ist die Einflussfigur nach Fig. 160, S. 172, ein einfaches Dreieck. In Fig. 188a, einen Träger von 20^m Weite darstellend, sind die Lasten oben gedacht. Die Spannkraft U_4 im vierten Fache des Untergurts werde betrachtet, so dass K' der Drehpunkt wird; ist dessen Abstand vom linken Auflager $x = 12^m$, so sind x und $l - x$ die beiden Einflussstrecken, auf denen die durchschnittlichen Belastungen möglichst auszugleichen sind. Zur Auffindung der

ungünstigsten Laststellung zeichne man die Lastgruppe in dem Maſsstabe des Trägers auf einen Papierstreifen, den man leicht über dem Träger verschieben kann. Da es für ein Gurtstück darauf ankommt, möglichst viel schwere Lasten in der Nähe des Drehpunktes K' zusammen zu drängen, so stellt man 2 Lokomotiven mit den Schornsteinen gegen einander, weil auf diese Weise eine Folge von 6 schweren Triebachsen entsteht. Bringt man nun die mittlere Triebachse der rechtsseitigen Lokomotive über den Drehpunkt K', so ist das die ungünstigste Stellung für U_4. Denkt man sich nämlich zunächst das Rad 2 noch rechts von K' stehend, so wird die Gesammtlast der Einflussstrecke links von K': $P_1 = 4 \cdot 13 = 52^t$, die Last der rechtsseitigen Strecke $P_2 = 2 \cdot 13 + 2 \cdot 9 = 44^t$. Die durchschnittlichen Belastungen sind daher $52 : 12 = 4^1/_3$ bezw. $44 : 8 = 5^1/_2$; rechts ist daher die Belastung stärker, so dass eine Verschiebung nach links erfolgen muss. Steht in Folge dessen aber das Rad 2 links von K', so vergröſsert sich P_1 auf $52 + 13 = 65^t$, während sich P_2 um ebenso viel, also auf $44 - 13 = 31^t$ vermindert, so dass nun die durchschnittliche Belastung links $(65 : 12 = 5^5/_{12})$ gröſser ist als rechts $(31 : 12 = 2^7/_{12})$. Die Verschiebung des Rades 2 über den Drehpunkt hinüber hat daher den Unterschied der durchschnittlichen Belastungen umgekehrt, es muss mithin dieses Rad über K' gestellt werden (Fig. 188 a).

Fig. 188.



Während das Rad 2 den Drehpunkt K' überschreitet, geht der Unterschied der durchschnittlichen Belastungen der beiden Einflussstrecken links und rechts von K' sprungweise aus dem Positiven ins Negative über. Sobald aber die Radlast 2 gerade bei K' steht, kann man sie offenbar nach Belieben zu der Gruppe P_1 oder der Gruppe P_2 zählen; auch kann man sich diese Last der Art in zwei Theile zerlegt denken, dass, wenn man den einen Theil zu P_1, den anderen zu P_2 rechnet, die durchschnittlichen Belastungen links und rechts von K' nicht nur möglichst gleich, sondern wirklich gleich werden. In

diesem Sinne kann man auch den allgemeinen Satz auf S. 199 jetzt dahin ändern: Der Einfluss einer gegebenen Lastgruppe wird möglichst groß, wenn dadurch, dass eine Last gerade auf einer Einflussgrenze steht, der Werth $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha = 0$ wird.

Was nun die Ermittelung der Spannkraft U_4 selbst anbelangt, so berechnet man den Einfluss der ständigen Belastung, wie auf S. 191 gezeigt; den Einfluss der Radlasten kann man entweder ebenfalls mittels der Momentengleichung finden, wobei es nicht erforderlich ist, die Radlasten erst in Knotenpunkts-Belastungen umzuwandeln, wenn man nur zur Vermeidung von Irrungen den Schnitt genau durch K' gelegt denkt; — oder man kann das Einflussdreieck für U benutzen, jede Last mit der zugehörigen Einfluss-Ordinate multipliciren und $\Sigma P \eta$ bilden.

Ungünstigste Laststellung für einen Stab des belasteten Gurtes. Bei einem Ständerfachwerke wäre die Behandlung dieselbe, wie vorstehend, weil der Drehpunkt in einer Lastpunkt-Senkrechten liegen würde. In Fig. 188a aber liegt der zu O_3 gehörige Drehpunkt K um e bezw. $\lambda - e$ vom linken und rechten Lastpunkte des durchschnittenen Faches entfernt (wagerecht gemessen), so dass die Einflussfigur 188b zu benutzen ist.

Es kommt darauf an, den Werth $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ mit Hülfe der gegebenen Abmessungen des Balkens auszudrücken. Bezeichnet man jetzt die Abscisse des Punkts K mit x, so ergiebt sich leicht aus der Figur

$$C_1 C_2 = \frac{l-x}{h \cos \omega} \cdot \frac{x-e}{l}; \quad D_1 D_2 = \frac{x}{h \cos \omega} \cdot \frac{l-x-\lambda+e}{l};$$

$$A_1 C_2 = x - e; \quad B_1 D_2 = l - x - \lambda + e.$$

Rechnet man daher die Ansteigungen nach links positiv, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{l-x}{h \cos \omega \cdot l}; \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{x}{h \cos \omega \cdot l};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{x(l-x-\lambda+e) - (l-x)(x-e)}{h \cos \omega \cdot l \lambda}$$

$$= \frac{(l-x)e}{h \cos \omega \cdot l \lambda} - \frac{x(\lambda - e)}{h \cos \omega \cdot l \lambda}.$$

Mithin wird

$$\Sigma P \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{h \cos \omega \cdot l} \left\{ P_1 (l-x) + P_2 (l-x) \frac{e}{\lambda} - P_2 x \frac{\lambda - e}{\lambda} - P_3 x \right\}$$

$$4) \quad \Sigma P \operatorname{tg} \alpha = \frac{x(l-x)}{h \cos \omega \cdot l} \left\{ \frac{P_1 + P_2 \, e/\lambda}{x} - \frac{P_3 + P_2 (1 - e/\lambda)}{l-x} \right\}.$$

Der eingeklammerte Theil, auf dessen Vorzeichen es ankommt, ist hier auch wieder auf die Form des Unterschiedes der durchschnittlichen Belastungen links und rechts vom Drehpunkte zurückgeführt; nur ist die Last P_2 des durchschnittenen Faches nach bestimmtem Verhältnisse den Gruppen P_1 und P_3 hinzugerechnet.

Es könnte scheinen, als ob die Laststellung in Fig. 188a für O_3 nicht die ungünstigste wäre, als ob die Räder 1, 2, 3 mehr über den Drehpunkt K gestellt werden müssten. Denkt man sich daher den Zug etwas nach links verschoben, so dass die Räder 1 und 2 im durchschnittenen Fache stehen, so wird $P_1 = 3 \cdot 13 = 39$, $P_2 = 2 \cdot 13 = 26$, $P_3 = 13 + 2 \cdot 9 = 31^t$. Das Vorzeichen von $\Sigma P \operatorname{tg} \alpha$ hängt also, da hier $x = 10$, $e = 1/_2 \lambda$, ab von $\frac{39+13}{10} - \frac{31+13}{10} > 0$, was eine Verschiebung nach rechts bedingt. Sobald aber das Rad 2 rechts von K' liegt, wird $P_1 = 39$, $P_2 = 13$, $P_3 = 44$, und man erhält $\frac{39 + 6^1/_2}{10} - \frac{44 + 6^1/_2}{10} < 0$; die gezeichnete Laststellung ist daher auch für O_3 die ungünstigste.

Will man nun O_3 mittels der Momentengleichung berechnen, so muss man die im durchschnittenen Fache befindliche Last in die beiden Knotenpunktsdrücke zerlegen, da nur der linksseitige am linken Abschnitte vorkommt, u. zw. in Bezug auf K mit einem anderen Momente als die Radlast selbst; die übrigen Lasten können unmittelbar benutzt werden. — Die Ermittelung von O_3 mittels der Einflussfigur geschieht ebenso, wie für U_4 gezeigt.

Wird ein Eisenbahngleis von 2 Fachwerkbalken getragen, so hat man natürlich nur die halben Achslasten, also die Radlasten, für einen Träger zu rechnen. Die Untersuchung der ungünstigsten Laststellung ist aber von dieser Frage unabhängig, weil es dabei nur auf Lastverhältnisse ankommt.

Ungünstigste Laststellung für die Wandglieder. Handelt es sich um eine rechts fallende Strebe, z. B. EF (Fig. 189a), so kommt für D_{max} die positive Einflussfläche von N bis B_1 in Frage, und man erkennt zunächst, dass möglichst schwere Lasten von rechts aus an das durchschnittene Fach hinan zu schieben sind. Die positive Einflussfigur zeigt zwei Strecken c_1 und c_2, und es muss nach S. 199 und 201 eine Ausgleichung der durch-

schnittlichen Belastungen derselben stattfinden. Nennt man daher die ins durchschnittene Fach vorgeschobene Lastgruppe P_1, die rechts davon befindliche P_2, so muss

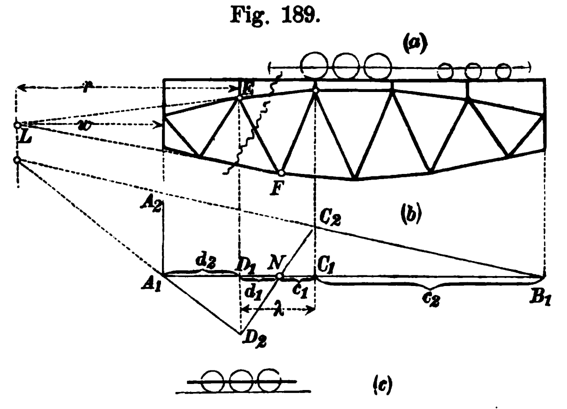
$$\frac{P_1}{c_1} = \frac{P_2}{c_2}$$

werden, wofür man aber auch schreiben kann

$$\frac{P_1}{c_1} = \frac{P_1 + P_2}{c_1 + c_2}.$$

Liegt die Einflussfigur in genügender Genauigkeit vor, so kann man c_1 abgreifen und jene Differenz ohne Weiteres berechnen. Wir wollen aber auch hier die Entscheidung aus den gegebenen Abmessungen des Trägers ableiten. Der Abschnitt $A_1 A_2$ ist nach Fig. 161c (S. 174) $a : h \sin \delta$, daher wird

Fig. 189.



$$C_1 C_2 = \frac{a}{h \sin \delta} \frac{c_2}{l}$$

und ebenso

$D_1 D_2 = \dfrac{b}{h \sin \delta} \dfrac{d_2}{l}$. Aus ähnlichen Dreiecken erhält man

$$\frac{\lambda}{c_1} = \frac{C_1 C_2 + D_1 D_2}{C_1 C_2} = \frac{a c_2 + b d_2}{a c_2} \text{ und daraus } \frac{c_2}{c_1} = \frac{a c_2 + b d_2}{a \lambda}.$$

Weil aber nach Fig. 161 (S. 174)

$$\frac{a}{b} = \frac{w}{w + l}$$

und nach Fig. 189 $\quad c_2 = l - d_2 - \lambda$, so wird

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{w l - w d_2 - w \lambda + (w + l) d_2}{w \lambda} = \frac{l (w + d_2)}{w \lambda} - 1$$

oder $\dfrac{c_1 + c_2}{c_1} = \dfrac{l (w + d_2)}{w \lambda}$. Für $\dfrac{P_1}{c_1} = \dfrac{P_1 + P_2}{c_1 + c_2}$ kann daher auch gesetzt werden:

$$5) \qquad \frac{P_1}{\lambda} (w + d_2) = \frac{P_1 + P_2}{l} w.$$

Hierin kann $\frac{P_1}{\lambda}$ als durchschnittliche Belastung des durchschnittenen Faches und $\frac{P_1 + P_2}{l}$ als durchschnittliche Belastung des ganzen Balkens aufgefasst werden. Diese durchschnittlichen Belastungen sind jedoch nicht unmittelbar zu vergleichen, sondern vorher noch mit $w + d_2$ bezw. w zu multipliciren.

Handelt es sich um D_{min}, also um eine möglichste Ausgleichung der durchschnittlichen Belastung der Strecken d_1 und d_2, so bekommt man zunächst einen von 5) abweichenden Ausdruck. Man kann jedoch letzteren Werth, wie man leicht erkennt, zur Auffindung der ungünstigsten Laststellung für gröſste und kleinste Spannkraft aller Wandglieder benutzen, wenn man die Bedeutung von w und $w + d_2$ verallgemeinert. Wird ein Zug von der einen Seite (etwa der rechten) auf die Brücke geschoben, so nenne man dasjenige Auflager, welches vom Zuge noch nicht erreicht ist, also den geringeren Stützendruck erhält, schlechtweg das unbelastete Auflager und verstehe unter w stets den Abstand des Drehpunktes vom u n b e l a s t e t e n Auflager. Ebenso wird beim Hineinschieben des Zuges ins durchschnittene Fach der eine Knotenpunkt desselben noch nicht vom Zuge bedeckt sein; dieser werde kurz der unbelastete Knotenpunkt genannt, und unter $w + d_2$, wofür wir nun r setzen wollen, möge immer der Abstand des Drehpunktes vom u n b e l a s t e t e n Knotenpunkte des durchschnittenen Faches verstanden werden. Bezeichnet man dann mit P_1 die Lasten im durchschnittenen Fache, mit $P_1 + P_2$ sämmtliche Lasten des Trägers, so muss allgemein

$$\frac{P_1}{\lambda} r = \frac{P_1 + P_2}{l} w \quad \text{werden.}$$

Für D_{max} ergiebt sich die in Fig. 189a gezeichnete Stellung als die ungünstigste. Es sei hierbei $w = 8^{\text{m}}$, $r = 12^{\text{m}}$, $\lambda = 4^{\text{m}}$. Schiebt man dann die erste Achse ins durchschnittene Fach vor, so wird $P_1 = 13$, $P_1 + P_2 = 66$, mithin $\frac{13}{4} 12 - \frac{66}{20} 8 > 0$. Im durchschnittenen Fache ist hiernach zu viel Last, weshalb ein Zurückziehen in die gezeichnete Stellung nöthig wird.

Für D_{min} ist die ungünstigste Belastungsart in Fig. 189c dargestellt. Weil jetzt das rechtsseitige Auflager das unbelastete ist, so wird $w = 28$, und ebenso $r = 16$. Da hier nur gleich schwere Achsen vorliegen, so kann das Gewicht einer Achse als Einheit gewählt werden. Daher ist,

wenn man eine Achse ins durchschnittene Fach vorgeschoben annimmt, $P_1 = 1$, $P_1 + P_2 = 3$.

$$\frac{1}{4}16 - \frac{3}{20}28 = 4 - 4{,}2 < 0;$$

die zu geringe Belastung des Faches erfordert also weiteres Hineinschieben des Zuges. Würde aber auch die zweite Achse noch hineintreten, so verursacht die Vergrößerung des ersten Gliedes der Differenz auf das Doppelte einen Zeichenwechsel, woraus die gezeichnete Stellung als die maßgebende folgt.

Das Eintreten von Lasten ins durchschnittene Fach erschwert die Berechnung mittels der Momentengleichung, weil diese Lasten in Knotenpunktsdrücke zerlegt werden müssen. Die bequemere Stellung in Fig. 189a nennt man im Gegensatze dazu die Grundstellung.*) In dem letzten Zahlenbeispiele war die Differenz 4 — 4,2 so wenig von Null verschieden, dass eine geringe Vergrößerung der Vorderlast leicht einen Zeichenwechsel hervorbringt. Es empfiehlt sich daher, bei der einseitigen Belastung für die Wandglieder das Gewicht der Vorderachse etwas zu erhöhen, etwa von 13 auf 15ᵗ; dann kann man ohne weitere Prüfung die Grundstellung (wobei der Zug nur bis an das durchschnittene Fach vorrückt) für alle Wandglieder anwenden.

$$P_1 = 15,\ P_1 + P_2 = 41^t \text{ giebt}$$

$$\frac{15}{4} \cdot 16 - \frac{41}{20}28 = 60 - 57{,}4 > 0,$$

d. h. Zurückziehen des Zuges aus dem Fache.

Für parallele Gurten wird die Bedingung 5) einfach zu

$$\frac{P_1}{\lambda} = \frac{P_1 + P_2}{l} \tag{6}$$

(Gleichheit der durchschnittlichen Belastungen), weil bei unendlich großem w der endliche Summand d_2 verschwindet.

X. Formänderung einfacher Fachwerke.

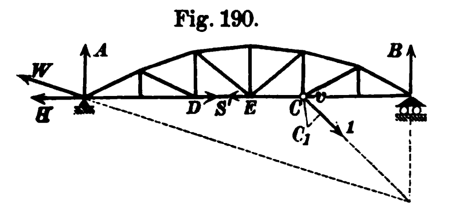
Die Ermittelung der Formänderung eines gegebenen Fachwerkes unter gegebenen Lasten ist eine rein geometrische Aufgabe, weil durch die Lasten die Spannkräfte und damit auch die Längenänderungen der einzelnen Stäbe gegeben sind, so dass von dem veränderten Fachwerke sämmtliche Stablängen vorliegen.

*) Siehe Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl., 1. Bd., S. 114.

Die innige Beziehung zwischen Geometrie und Mechanik gestattet aber, wie in manchen anderen Fällen, so auch hier, eine Lösung der geometrischen Aufgabe mit Hülfe mechanischer Sätze.

Wir nahmen die Lasten bisher stets senkrecht an, so dass auch nur lothrechte Auflagerdrücke entstanden. Hier ist es der Allgemeinheit wegen zweckmäfsig, an einem beliebigen Knotenpunkte C (Fig. 190) eine schräg gerichtete Kraft von der Gröfse Eins angreifen zu lassen. Dann muss eine Verschiebung des gesammten Fachwerkes dadurch verhindert werden, dass man das eine Auflager, etwa A, auch in wagerechtem Sinne festlegt, während das andere, ein Gleit- oder Rollenlager, nur lothrechte Widerstände leistet. (Eine völlige Befestigung des steifen Fachwerkkörpers an beiden Enden würde nach den Lehren der Mechanik bekanntlich eine statisch unbestimmte Anordnung bilden.) Da die Widerstände B und W sich mit der Kraft 1 in einem Punkte schneiden müssen, so sind B und W leicht zu bestimmen. Die Kraft 1 spielt nur die Rolle einer gedachten Kraft; die diesem Gleichgewichtszustande entsprechenden Stabkräfte sind mittels der Momentengleichung ohne Schwierigkeit zu finden. Die so erhaltenen gedachten Stabkräfte sollen allgemein S' genannt werden; sie sind, ebenso wie B und W, weil aus einer Kraft 1 hervorgegangen, unbenannte, nur von der geometrischen Form der Figur abhängige Verhältniszahlen.

Fig. 190.



Wir denken uns die Stäbe des Fachwerkes zunächst starr; ein Stab aber, z. B. DE, von der Länge s dessen gedachte Spannkraft S' ist, erfahre in irgend einer Weise eine kleine Verlängerung um Δs (vielleicht durch eine Temperatur-Aenderung, oder durch Nachlassen eines in den Stab eingeschalteten Schraubenschlosses, oder durch eine Elasticitätswirkung oder dgl.); dann wird das Fachwerk eine Formänderung erfahren, wobei es sich um den festen Punkt A drehen und bei B wagerecht gleiten muss. Der Punkt C, an dem wir die Kraft Eins angebracht haben, beschreibe den Weg $C\,C_1$, dessen rechtwinklige Projektion auf die Kraftrichtung die Gröfse v habe. Bei dieser Bewegung,

welche wir als sehr langsam annehmen wollen, verrichten, wenn man wie bei einem idealen Mechanismus alle Reibungswiderstände beseitigt denkt, nur die Kraft Eins und die Spannkraft S' mechanische Arbeiten, u. zw. muss deren Summe Null betragen. (Die hier in Frage kommenden Bewegungen Δs und v heifsen mögliche oder virtuelle Bewegungen, weil ihr Verhältnis durch die geometrische Form des Fachwerks bedingt ist. Der letztgenannte Satz von der Arbeitssumme gleich Null heifst der Satz der virtuellen Verrückungen.) Da die Kraft S' das Bestreben hat, die beiden Endpunkte des Stabes zu nähern, so wird bei einer Verlängerung eine negative Arbeit verrichtet, und man erhält $0 = 1 \cdot v - S' \Delta s$ oder $v = S' \Delta s$. Erleiden aber sämmtliche Stäbe Verlängerungen, so wird sich v aus den Beiträgen der einzelnen Wirkungen zusammensetzen, so dass dann

$$1) \qquad v = \Sigma S' \Delta s.$$

D. h. um diejenige Verrückung v zu ermitteln, welche ein beliebiger Knotenpunkt nach einer bestimmten Richtung in Folge bestimmter Längenänderungen Δs der einzelnen Stäbe erfährt, bringe man an dem Knotenpunkte in der bestimmten Richtung eine Kraft 1 an, ermittle die hierdurch erzeugte Spannkraft jedes Stabes, multiplicire sie mit der Verlängerung Δs desselben und summire die Produkte.*)

Will man die wahre Verrückung eines Knotenpunktes erfahren, so nehme man die Kraft Eins das eine Mal etwa wagerecht, ein zweites Mal vielleicht lothrecht an, um die wagerechte bezw. die lothrechte Projektion der Verrückung zu erhalten.

Um im Besonderen diejenige Verrückung v kennen zu lernen, die einem bestimmten Belastungszustande, z. B. voller Belastung entspricht, ermittele man aufser den gedachten Spannkräften S' auch die wahren Stabkräfte S, welche dem gegebenen Belastungszustande entsprechen; dann wird (innerhalb der Elasticitätsgrenze) die Stabverlängerung

$$2) \qquad \Delta s = \frac{S s}{E F},$$

*) Vergl. Mohr, Beitrag zur Theorie des Fachwerks; Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1874, S. 512.

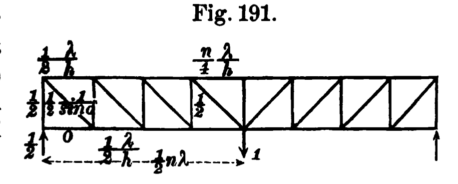
wenn F der Querschnitt des Stabes, mithin nach Gl. 1:

$$v = \Sigma \frac{S' S s}{E F}. \tag{3}$$

Diejenigen Stäbe, für welche die gedachte und die wahre Spannkraft von übereinstimmenden Vorzeichen sind, liefern positive Beiträge zu v, und umgekehrt.

1. Beispiel: Es soll die Durchbiegung v eines Parallelträgers von n gleichen Fachen ($n\lambda = l$) bei voller Belastung unter der Voraussetzung berechnet werden, dass in diesem Zustande alle Stäbe gleiche Anstrengung $\pm\sigma$ erfahren. Bringt man die gedachte Kraft 1 senkrecht in der Mitte des Untergurts an, so erkennt man leicht, dass der Mittelständer die Spannkraft $S' = 0$ erfährt und dass alle übrigen Stäbe in demselben Sinne gespannt werden, wie bei voller Belastung. S und S' haben daher durchweg gleiche Vorzeichen, so dass alle Stäbe positive Beiträge zu v liefern. Wir können daher die Vorzeichen ganz außer Acht lassen und $S : EF$ ohne Weiteres als überall gleiche Größe $\sigma : E$ vor das Σ setzen. Da ferner alles zur Mitte symmetrisch ist, so summirt man nur bis zur Mitte und fügt den Faktor 2 hinzu:

Fig. 191.



$$v = 2 \frac{\sigma}{E} \Sigma S' s.$$

Schneidet man durch das erste Fach, so erkennt man leicht, dass der Auflagerdruck $^1/_2$ im Obergurte die Kraft $^1/_2\, ^\lambda/_h$ erzeugt. In den folgenden Fachen wird der Hebelarm der 2fache, der 3fache u. s. f., so dass die Spannkräfte des Obergurts bis zur Mitte werden:

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda}{h},\quad \frac{2}{2}\frac{\lambda}{h}, \;\ldots\; \frac{1}{2}\frac{n}{2}\frac{\lambda}{h}.$$

Dem entsprechend im Untergurt:

$$0,\; \frac{1}{2}\frac{\lambda}{h}, \;\ldots\; \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\lambda}{h}.$$

Die Querkraft ist überall gleich dem Auflagerdruck $^1/_2$, daher die Strebenkraft durchweg $\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\delta}$, die Ständerkraft $^1/_2$. Da die Gurtlängen durchweg λ, die Strebenlängen $\lambda \sec\delta$, die Ständerlängen h sind, so wird

$$v = 2\frac{\sigma}{E}\left\{\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{h}\left[1+2+\ldots\frac{n}{2}\right] + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{h}\left[1+2+\ldots+\frac{n}{2}-1\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\delta}\frac{\lambda}{\cos\delta}\frac{n}{2} + \frac{1}{2}h\frac{n}{2}\right\}$$

oder

$$v = \frac{\sigma}{E}\left\{\frac{\lambda^2}{h}\frac{n^2}{4} + \frac{n\lambda}{\sin 2\delta} + \frac{n}{2}\lambda \operatorname{tg}\delta\right\},\quad \text{also}$$

$$\frac{v}{l} = \frac{\sigma}{E}\left(\frac{l}{4h} + \frac{1}{\sin 2\delta} + \frac{\operatorname{tg}\delta}{2}\right).$$

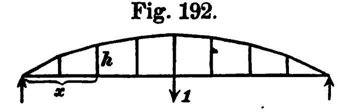
Das erste Glied berücksichtigt den Einfluss der Gurten, das zweite und dritte den der Streben und Ständer. Ist etwa $l = 8h$, $\delta = 45^0$, $\sigma : E = 1 : 3000$, so wird

$$\frac{v}{l} = \frac{1}{3000}\left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{857}.$$

In Wirklichkeit wird die Durchbiegung geringer ausfallen, weil die Ständer der Steifigkeit wegen so erhebliche Querschnitte haben müssen, dass sie eine weit geringere Anstrengung erfahren als z. B. die gezogenen Theile. Für Brückenträger kommt dann noch hinzu, dass die Wandglieder für einseitige Belastung einzurichten sind, daher bei voller Belastung nicht die zulässige Spannung σ haben werden. Annähernd kann man beide Umstände berücksichtigen, indem man den Einfluss der Pfosten ganz fortlässt. Dann wird $\frac{v}{l} = \frac{1}{1000}$.

2. Beispiel: Die Durchbiegung eines parabolischen Trägers bei voller Belastung soll berechnet werden. Der Untergurt sei gerade (Fig. 192). In diesem Zustande sind die Streben spannungslos; zugleich wirken die Ständer nur als einfache Hängestangen, werden daher wegen ihres auf Knickfestigkeit bemessenen Querschnittes nur so geringe Verlängerungen erfahren, dass man diese vernachlässigen kann. Demnach kommen nur die Gurten in Frage. Diese werden bei der gedachten Belastung in demselben Sinne gespannt wie in Wirklichkeit, so dass wieder sämmtliche Beiträge zu v positiv sind. Setzen wir wieder bei allen Theilen der Gurten die gleiche Anstrengung σ voraus, so wird

Fig. 192.



$$v = \frac{2\sigma}{E}\Sigma S's,$$

wenn man nur bis zur Mitte summirt. Es empfiehlt sich hier, die Summation durch eine Integration zu ersetzen, d. h. die Zahl der Gelenkpunkte sehr groß anzunehmen.

Für irgend eine Stelle ist die Untergurtkraft

$$U' = \frac{1}{2}\frac{x}{h} = \frac{l^2}{8h_m(l-x)},$$

die Obergurtkraft $O' = U' \sec\omega$. Da nun $ds = dx \sec\omega$, so wird

$$v = \frac{2\sigma}{E}\frac{l^2}{8h_m}\left\{\int_0^{l/2}\frac{dx}{l-x} + \int_0^{l/2}\frac{dx \sec^2\omega}{l-x}\right\}.$$

Weil aber

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{dh}{dx} = \frac{4\,h_m}{l^2}(l - 2\,x),$$

so wird

$$\int\frac{dx}{l-x}(1+\sec^2\omega) = \int\frac{dx}{l-x}\left(2+\frac{16\,h_m^2}{l^4}(l^2-4\,l\,x+4\,x^2)\right)$$

$$= 2\left(1+\frac{8\,h_m^2}{l^2}\right)\int\frac{dx}{l-x} - \frac{64\,h_m^2}{l^4}\int x\,dx\,.$$

Daher entsteht
$$v = \frac{\sigma}{E}\,\frac{l^2}{2\,h_m}\left\{\left(1+\frac{8\,h_m^2}{l^2}\right)\mathrm{l}\,2 - \frac{4\,h_m^2}{l^2}\right\}$$

oder
$$\frac{v}{l} = \frac{\sigma}{E}\left(0{,}347\,\frac{l}{h_m} + 0{,}773\,\frac{h_m}{l}\right).$$

Für $\sigma : E = 1:3000$ und $l = 8\,h_m$ wird $\frac{v}{l} = \frac{1}{1044}$.

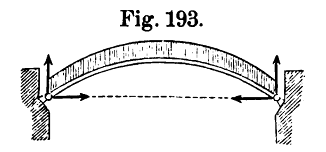
Zehnter Abschnitt.

Bogenträger mit drei Gelenken.

I. Entwickelung des Bogenträgers mit 3 Gelenken; Kämpferdrucklinie.

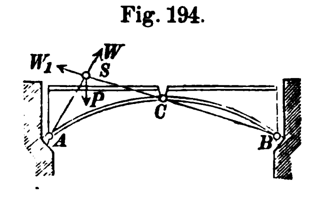
Denkt man sich einen parabolischen Träger mit geradem Untergurt, bei welchem die gleichförmig vertheilte Belastung auf dem Obergurt liegt, so sind die Wandglieder spannungslos (vgl. S. 179); denkt man sich diese entfernt, so bleiben nur die beiden Gurten übrig. Der Untergurt hat jetzt nur die Aufgabe, als Zugstange die Verlängerung der Sehne des Obergurts zu verhindern, und diese kann durch feste Widerlager, welche in ihrem Kämpferpunkte aufser einem lothrechten Drucke auch einen Seitenschub aufzunehmen vermögen, erfüllt werden (Fig. 193). Die Form des gekrümmten Gurtes kann nur für eine bestimmte Belastungsart eine Gleichgewichtsform sein. Bei veränderlicher Belastung muss er gegen Biegung ausgesteift werden, u. zw. kann dies geschehen, indem man z. B. ihn an der oberen Seite mit einer Wand verbindet, die oben wiederum durch einen Gurt gesäumt ist. Würde man diese beiden Versteifungstheile aber über die ganze Länge ununterbrochen durchführen, so bildete der aus 2 Gurten und einer Wand bestehende Bogenträger einen steifen Körper, der an beiden Enden in festen Gelenken gehalten wird. Ein solcher Körper würde nach den Lehren der Mechanik statisch unbestimmt bezüglich seiner Befestigung sein, jedoch durch Einschaltung eines dritten, sog. Scheitelgelenkes wieder statisch bestimmt werden. Auf diese Weise gelangen wir zu einem statisch bestimmten Bogenträger mit 3 Gelenken. Der

Fig. 193.



hinzugefügte Versteifungsgurt kann von beliebiger Form sein; wir wollen ihn als wagerecht annehmen, wie er bei eisernen Bogenbrücken häufig vorkommt (Fig. 194). (Den Bogengurt hatten wir anfänglich parabolisch vorausgesetzt, doch geschah das nur beispielsweise; wenn diese Form auch meist gewählt wird, so erkennt man doch leicht, dass sie für den Bogenträger durchaus nicht wesentlich ist.)

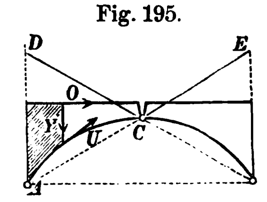
Fig. 194.



Behufs Ermittelung der Widerlager- oder Kämpferdrücke kann jede Bogenhälfte wie eine einfache Gelenkstange, der ganze Bogenträger also wie eine Verbindung zweier Stangen angesehen werden. Diejenige dieser Stangen, welche unbelastet ist, vermag dann (bei reibungslosen Gelenken) nur in der Richtung der Verbindungsgeraden ihrer beiden Gelenke einen Gegendruck zu leisten. Liegt daher die einzige Belastung P auf der linken Hälfte, so hat der rechtsseitige Kämpferdruck W_1 (der in diesem Falle auch zugleich den Druck im Scheitelgelenke darstellt) die Richtung BC. Durch den Schnittpunkt S der Geraden BC mit der Richtungslinie der Last geht dann auch der linksseitige Kämpferdruck W hindurch, weil die 3 im Gleichgewichte befindlichen Kräfte P, W und W_1 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben müssen.

Solange die bewegliche Einzellast P auf der linksseitigen Bogenhälfte bleibt, behält der Kämpferdruck W_1 seine Richtung bei; der Schnittpunkt S der beiden Kämpferdrücke verschiebt sich daher auf der Verlängerung CD der Geraden BC. Liegt die Last aber auf der rechten Hälfte, so ist alles symmetrisch vertauscht. Die Verlängerungen von BC und AC bilden demnach eine gebrochene Linie DCE (Fig. 195), auf welcher sich der Schnittpunkt S der beiden Kämpferdrücke bewegt, während eine Einzellast über den Träger wandert. Diese Linie heifst die Kämpferdruck-Schnittlinie oder kürzer die Kämpferdrucklinie. Sie bildet bei allen Bogenträgern (auch bei denen mit weniger als 3 Gelenken) ein wichtiges Hülfsmittel der Berechnung.

Fig. 195.



Da die Untersuchung eines Vollwandträgers übersichtlicher ist als diejenige des entsprechenden Fachwerks, so soll eine

volle Wand zwischen den Gurten angenommen werden. Die Berechnung etwaiger Wandglieder lässt sich dann leicht aus den Ergebnissen für die Wandscheerkraft ableiten.

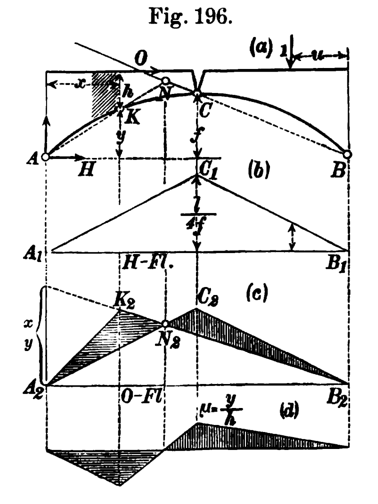
Führt man einen lothrechten Schnitt durch den Bogenträger, so wirken dann, wie bei einem Balken auf 2 Stützen (s. S. 118) die inneren Kräfte O, U und Y.

II. Einflusslinien.

Da die äufseren Kräfte und auch die inneren Spannkräfte mit Hülfe der Momentengleichung gefunden werden können, so sind die Beziehungen zwischen den Kräften und den Abscissen der beweglichen Einzellast linear; die Einflusslinien müssen deshalb aus Geraden bestehen.

Einflusslinie für den Seitenschub *H* (*H*-Fläche). Die Spannweite sei l, die Pfeilhöhe des symmetrischen Bogens f; das mittlere Gelenk liege genau im Scheitel. Die lothrechten Seitenkräfte der Kämpferdrücke ergeben sich ebenso wie beim Balken, da die hinzu gekommenen Kräfte H in Bezug auf die Kämpferpunkte keine Momente haben. Die Last Eins in Fig. 196a bringt daher $A = 1 \cdot u : l$ hervor. Zur Bestimmung von H beachte man, dass in Bezug auf das reibungslos gedachte Scheitelgelenk die Momentensumme der Kräfte an der einen Bogenhälfte Null sein muss. Dann wird $Hf = A \cdot {}^1/_2\, l$ oder $H = \frac{u}{2f}$. Da für $u = {}^1/_2\, l$, $H = l : 4f$ ist, so steht damit die Einflusslinie $B_1\, C_1$ für H und dazu symmetrisch $A_1\, C_1$ fest (Fig. 196b).

Fig. 196.



Es empfiehlt sich, die ferneren Einflusslinien auf die entsprechenden des Balkens zurückzuführen, u. zw. in der Art, dass der Einfluss der hinzugekommenen Kraft H in einfachster Weise mittels der H-Linie dargestellt wird.

Einflussfläche für die Gurtkraft *O*. Für diese ist K der mafsgebende Drehpunkt mit der Höhe y über AB, also $-Hy$ der Beitrag von H zum Momente; die Querschnittshöhe des

Bogenträgers sei hier h. Nennt man wieder (wie S. 101) M'_x das „einfache Moment“, d. h. das Moment eines Balkenträgers AB, so ist

$$O = -\frac{M'_x}{h} + \frac{Hy}{h} = -\frac{y}{h}\left(\frac{M'_x}{y} - H\right).$$

Man wählt nun $\mu = y : h$ zum Multiplikator*) (vgl. S. 101) und zeichnet die Einflussfigur $A_2 K_2 B_2$ für $M'_x : y$, indem man am linksseitigen Auflager nicht x (wie S. 72), sondern $x : y$ aufträgt. Fügt man dann die H-Linie $A_2 C_2 B_2$ nach derselben Seite hinzu, so entsteht durch einfaches Abziehen der Ordinaten beider Linien die Einflussfläche für O mit dem Multiplikator $y : h$. Wo die H-Ordinaten überwiegen, ist der Einfluss positiv, und umgekehrt.

Die Lage des Einfluss-Nullpunktes N_2 lässt sich jedoch aus der Trägerfigur unmittelbar bestimmen, indem man AK bis zum Schnittpunkte N mit der Kämpferdrucklinie verlängert. Eine in N angebrachte Last verursacht nämlich nach Figur 194 einen linksseitigen Kämpferdruck W in der Richtung AN, der also durch den Drehpunkt K geht. Da nun W die einzige äufsere Kraft links vom Schnitte, so ist das äufsere Moment Null, mithin auch $O = 0$. Man braucht daher in Fig. 196c die Gröfse x/y nicht aufzutragen; vielmehr zeichnet man die H-Linie, projizirt auf deren linke Hälfte den Punkt N, erhält damit $B_2 N_2 K_2$ und vollendet die Figur durch $A_2 K_2$. (Negative Einflüsse sind wieder wagerecht schraffirt.) Die Einfluss-Ordinaten kann man dann auch leicht von einer geraden Achse aus abtragen (Fig. 196d).

Jede Last rechts von dem Nullpunkte erzeugt positives O, und umgekehrt. Für Lokomotiv-Belastung würde man das S. 74—91 Entwickelte sinngemäfs anzuwenden haben, doch wollen wir darauf nicht näher eingehen.**)

Einflussfläche für die Kraft U im Bogengurte (U-Fläche). Für U ist K' der mafsgebende Drehpunkt (Fig. 197); zieht man AK' durch bis zum Schnitte N mit der Kämpferdrucklinie, so ist N wieder der Einfluss-Nullpunkt. Es ist

$$U = \frac{M'_x - H(h_m + f)}{h \cos \nu} = \frac{h_m + f}{h \cos \nu}\left(\frac{M'_x}{h_m + f} - H\right),$$

wenn h_m die Höhe des Obergurtes über dem Scheitelgelenke ist.

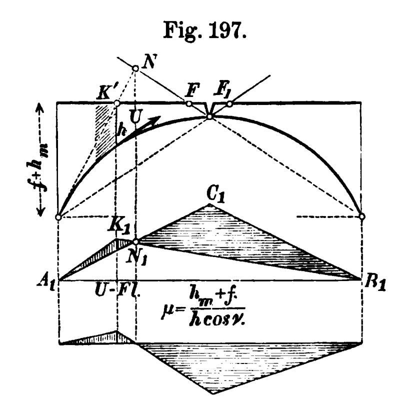
---

*) Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, S. 83.

**) Keck, Bögen mit 3 Gelenken; hannoversche Zeitschrift 1874, S. 374.

Hiernach wählt man $\mu = \frac{h_m + f}{h \cos \nu}$ zum Multiplikator (wenn ν der Neigungswinkel von U), zeichnet die H-Linie $A_1 C_1 B_1$, projicirt N nach N_1, zieht $B_1 N_1 K_1$ und $K_1 A_1$. Wo H überwiegt, sind die Einflüsse negativ. Jede Last rechts vom Nullpunkte hat daher negativen Einfluss auf U.

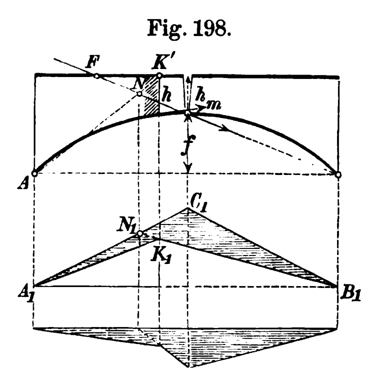
Fig. 197.



Von Wichtigkeit sind die Punkte F und F_1, in denen die Kämpferdrucklinie den Obergurt schneidet. Schiebt man nämlich den Schnitt so weit nach rechts, dass er durch F hindurchgeht, so fällt auch der Drehpunkt nach F, und es fallen überhaupt die 3 Punkte F, K' und N zusammen. In der Einflussfigur wird dann auch K_1 mit N_1 zusammenfallen, und die positiven Einflüsse links von N werden damit zu Null.

Rückt aber der Drehpunkt auf die rechte Seite von F (Fig. 198) und bestimmt man den Punkt N wie vorher, so hat dieser jetzt nicht mehr die Bedeutung eines Einfluss-Nullpunktes. Denn er liegt links vom Schnitte; eine in N wirkende Last P gehört zu den Kräften des linksseitigen Abschnittes und setzt sich mit dem Kämpferdrucke W zu einer Mittelkraft zusammen, welche das Entgegengesetzte von W_1 ist (da W, W_1 und P sich im Gleichgewichte halten). Diese Mittelkraft geht nicht durch den Drehpunkt, so dass P nicht den Einfluss Null auf U hat. Zeichnet man aber die Einflussfigur für U in der ursprünglichen Weise, wie es bezüglich O in Fig. 196c dargestellt wurde, so findet man, dass N_1 seine **geometrische** Bedeutung als Schnittpunkt der Geraden $B_1 K_1$ mit der linken Hälfte $A_1 C_1$ der H-Linie behalten hat. Man trägt daher die H-Linie $A_1 C_1 B_1$ auf, zieht die Lothrechte

Fig. 198.



$N N_1$, verbindet N_1 mit B_1, zieht die Lothrechte $K' K_1$ und schliefslich die Gerade $A_1 K_1$. Das Dreieck $A_1 K_1 B_1$ liegt jetzt ganz innerhalb $A_1 B_1 C_1$, und die Einflüsse sind durchweg negativ.

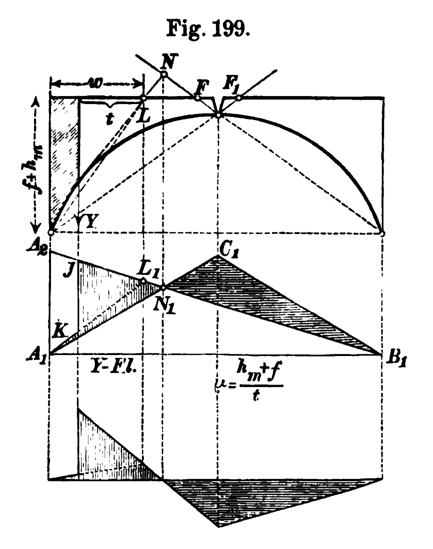


Fig. 199.

Einflussfläche für die Wandscheerkraft Y. Zur Berechnung von Y dient der Schnittpunkt L von O und U als Drehpunkt (Fig. 199), der vom linksseitigen Auflager um w, von der Schnittstelle um t entfernt sein möge. Bei einem einfachen Balken derselben Form (jedoch ohne Scheitelgelenk) würden alle Lasten in gleichem positiven Sinne auf Y' einwirken. Die Einflussfigur würde dieselbe Gestalt haben wie in Fig. 111, S. 122, wobei zu bemerken, dass $\frac{a}{h}$ und $\frac{b}{h}$ hier durch $\frac{w}{t}$ und $\frac{l-w}{t}$ ersetzt werden können. Beim Bogenträger erzeugt H allein die Kraft

$$Y_H = -H \frac{h_m + f}{t}; \text{ daher wird}$$

$$Y = Y' - H \frac{h_m + f}{t} = \frac{h_m + f}{t} \left(Y' \frac{t}{h_m + f} - H \right).$$

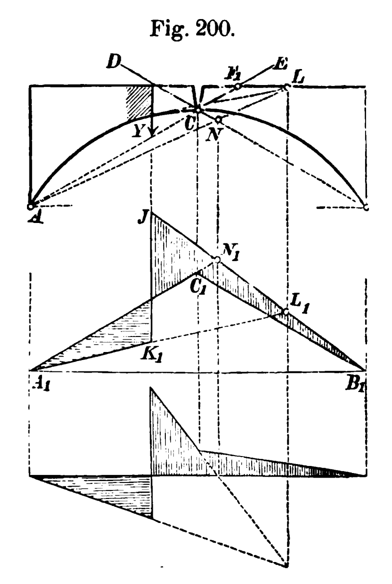
Hiernach wählt man $\mu = \frac{h_m + f}{t}$ zum Multiplikator. Auf der linksseitigen Auflagerlothrechten hat man dieserhalb nicht $A_1 A_2 = \frac{w}{t}$, sondern $A_1 A_2 = \frac{w}{h_m + f}$ aufzutragen und zieht $B_1 A_2$; ist L_1 der Schnittpunkt der Lothrechten durch den Drehpunkt L mit $B_1 A_2$, so zieht man (wie in Fig. 111) $A_1 L_1$. Ist dann $J K$ die Lothrechte durch die Schnittstelle, so ist $A_1 K J B_1$ die Einflussfläche für Y' mit dem Multiplikator μ. Davon sind nun die Ordinaten des Dreiecks $A_1 C_1 B_1$ abzuziehen, so dass die schraffirte Einflussfigur entsteht; rechts von N_1 sind negative

Einflüsse, und umgekehrt, solange L links von F. Der Sprung JK, welcher bei $\mu = 1$ gleich der Einheit sein müsste, ist hier natürlich $t : (h_m + f)$, wie man leicht findet. Die Einflussgrenze NN_1 kann aber wieder aus der Trägerfigur unmittelbar gefunden werden, indem man AL bis zum Schnitte N mit der Kämpferdrucklinie verlängert. Benutzt man diesen Einfluss-Nullpunkt, so braucht man wiederum (wie zu den Figuren 196 und 197 erörtert) $A_1 A_2 = w : (h_m + f)$ nicht aufzutragen, sondern beginnt mit der H-Figur $A_1 C_1 B_1$, zieht NN_1, $B_1 N_1 J$ usf.

Eine Abweichung erfährt die Einflussfigur, wenn der Drehpunkt L zwischen F und F_1 oder gar rechts von F_1 liegt.

Fällt nämlich (in Folge einer Verlegung des Schnittes nach rechts) L mit F zusammen, so liegt auch N in F; dann fällt in der Einflussfigur $A_1 K L_1$ auf $A_1 N_1$, d. h. Lasten links vom Schnitte haben keinen Einfluss auf Y. Liegt nun L zwischen F und F_1, so fällt L_1 auf die rechte Seite von N_1, so dass links vom Schnitte die Einflussordinaten negativ werden. Es tritt daher die Schnittstelle als neue Grenze zwischen positiver und negativer Einflussstrecke zu dem Nullpunkte N hinzu.

Fig. 200.



Liegt aber der Drehpunkt L rechts von F_1, so kommt der Einfluss-Nullpunkt in Wegfall. Je mehr sich nämlich L dem Punkte F_1 nähert, um so näher rückt N_1 dem Punkte C_1 (Fig. 199), und beim Zusammenfallen beider haben Lasten rechts von C den Einfluss Null. Bei noch weiterer Verschiebung des Punktes L nach rechts (Fig. 200) trifft aber die Gerade AL die gebrochene Kämpferdrucklinie gar nicht mehr, sondern nur die Verlängerung der Geraden DC in N. Dieser Punkt N ist daher jetzt kein Einfluss-Nullpunkt mehr; er behält aber seine geometrische Bedeutung bei, in so fern die Lothrechte durch N die Verlängerung von AC_1 in einem Punkte N_1 schneidet, durch den $B_1 L_1 J$ hindurch gehen muss.

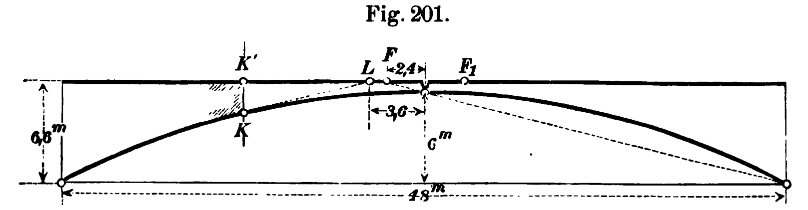
Zieht man dann noch $A_1 K_1 L_1$, so ist die Einflussfigur vollendet. Links vom Schnitte sind die Einflüsse negativ (wie im vorigen Falle), rechts aber sind sie positiv geworden, weil $B_1 J$ jetzt aufserhalb $A_1 C_1 B_1$ liegt.

Im Gebiete einer und derselben Einfluss-Geraden dürfen (nach S. 197) die Lasten nach Belieben zerlegt oder zu Mittelkräften vereinigt werden, ohne dass dadurch an den Ergebnissen der Rechnung etwas geändert wird.

III. Unmittelbare Berechnung der Spannkräfte eines parabolischen Bogenträgers mit drei Gelenken.

Der Bogengurt habe die Gestalt einer Parabel von 48^m Spannweite und 6^m Pfeilhöhe (Fig. 201). Der Obergurt liege

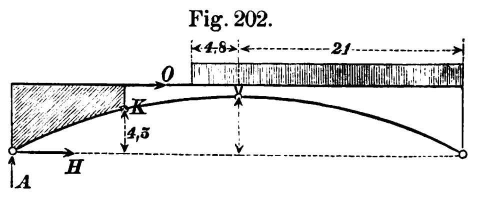
Fig. 201.



um 0,6^m über dem Scheitelgelenke oder um 6,6^m über den Kämpfergelenken. Die Belastung bestehe in einer ständigen Last $g = 1{,}3\,{}^t/_m$ und einer beweglichen Last $p = 2\,{}^t/_m$. Für einen Schnitt KK' in der Mitte der einen Bogenhälfte sollen die Spannkräfte O, U und Y berechnet werden.

Weil die parabolische Gestalt des Bogengurts eine Gleichgewichtsform für die ständige Belastung g, so wird diese nur von dem Bogen aufgenommen und liefert für O und Y die Werthe Null. Für diese beiden Spannkräfte braucht daher g nicht berücksichtigt zu werden.

Fig. 202.



Im Obergurt entsteht O_{max}, wenn (nach Fig. 196, S. 213) alles rechts von N belastet ist. Da der Drehpunkt K in der Höhe $y = 4{,}5$ ^m über der Sehne liegt, so findet man den Abstand des Punktes N von

der Mitte leicht zu 4,8 ᵐ. Fig. 202 zeigt daher den Zustand für O_{max}. Die Momentengleichung in Bezug auf B giebt $A = 17{,}28^t$. Betrachtet man dann die linksseitige Hälfte allein und stellt die Momentengleichung für das Scheitelgelenk auf, so kommt $0 = -H \cdot 6 + A \cdot 24 - 2 \cdot 4{,}8 \cdot 2{,}4$, woraus $H = 65{,}28^t$. Wird nun noch das Stück des Bogenträgers links vom Schnitte betrachtet, welches der Deutlichkeit wegen schraffirt ist, so erhält man in Bezug auf K:

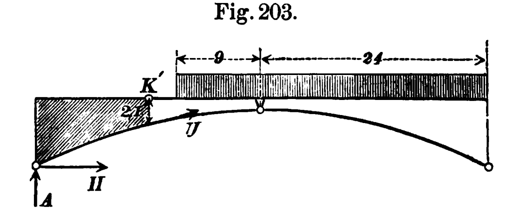
$$0 = O \cdot 2{,}1 + A \cdot 12 - H \cdot 4{,}5 \quad \text{oder} \quad O_{max} = 41{,}14^t.$$

O_{min} entsteht, wenn alles links von N belastet ist, braucht aber nicht besonders berechnet zu werden, sondern muss $= - O_{max}$ sein, weil für volle Belastung $O =$ Null ist.

(Selbstverständlich kann man diese Spannkräfte auch finden, indem man die positiven bezw. negativen Einflussflächen mit p multiplicirt; es sollte hier aber gezeigt werden, wie man die inneren Kräfte unmittelbar berechnen kann.)

Bezüglich der Bogenspannkraft U liegt hier der Grundfall vor, wo der Drehpunkt K' sich links von F befindet (s. Fig. 201), so dass nach Fig. 197, S. 215 wiederum eine Einflussgrenze N zu benutzen ist. Dieselbe liegt um 9 ᵐ links von der Mitte. Die Neigung des Bogengurts an der Schnittstelle ergiebt sich aus der Parabelgleichung leicht zu $\operatorname{tg} \nu = 1/4$; dem entspricht $\cos \nu = 0{,}97$, $\sec \nu = 1{,}08$. Der Hebelarm von U in Bezug auf K' wird daher $2{,}1 \cdot 0{,}97 = 2{,}037$.

Fig. 203.



Die ständige Belastung erzeugt einen Seitenschub $H = \frac{g\,l^2}{8\,f}$ und eine Bogenspannkraft

$$U_g = -\frac{g\,l^2}{8\,f} \sec \nu = -\frac{g\,48^2}{6 \cdot 6}\,1{,}03 = -49{,}44\,g\,.$$

Die bewegliche Belastung rechts von N (nach Fig. 203) liefert einen Auflagerdruck $A = 11{,}344\,p$, einen Schub $H = 38{,}625\,p$, daher wird am linksseitigen Abschnitte

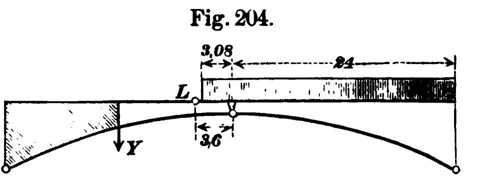
$$0 = -U_p \cdot 2{,}037 + 11{,}344\,p \cdot 12 - 38{,}625\,p \cdot 6{,}6$$

und hieraus $U_p = -58{,}32\,p$. Danach ist $U_{min} = -49{,}44\,g - 58{,}32\,p$

und hieraus wiederum $U_{max} = -49{,}44\,g + (58{,}32 - 49{,}44)\,p$. Für $g = 1{,}3$ und $p = 2$ wird dann $U_{min} = -180{,}91^t$, $U_{max} = -46{,}51^t$.

Für die Berechnung der Wandscheerkraft Y hat man bei K (Fig. 201) an die Parabel eine Tangente zu legen, welche den Obergurt in L schneidet. Dieser Drehpunkt L liegt dann um $3{,}6^m$ links von der Mitte, also auch links von F, so dass wiederum der Grundfall vorliegt, in welchem nach Fig. 199, S. 216 ein Punkt N als Einflussgrenze dient. Dieser liegt, wie man leicht findet, um $3{,}08^m$ links von der Mitte.

Fig. 204.



Belastet man alles rechts von N mit p (Fig. 204), so wird $A = 15{,}28^t$, $H = 59{,}53^t$, und man erhält

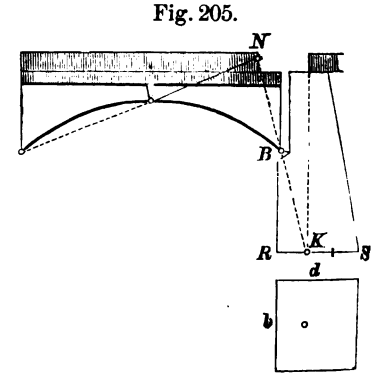
$$0 = -Y \cdot 8{,}4 + A \cdot 20{,}4 - H \cdot 6{,}6 \quad \text{oder}$$

$$Y_{min} = -9{,}66^t \text{ und daraus } Y_{max} = 9{,}66^t.$$

IV. Berechnung der Pfeiler einer Bogenbrücke.

Soll der Widerlagspfeiler einer Bogenbrücke nicht in Gefahr kommen, durch den Seitenschub umgestürzt zu werden, so dürfen die Druckspannungen an der Umsturzseite des Pfeilers das zulässige Maſs nicht überschreiten. Wiewohl nun H am gröſsten wird bei voller Belastung des Bogenträgers, so bildet diese doch nicht den ungünstigsten Fall für die Kantenpressung in einer Fuge, weil dann zugleich der lothrechte Auflagerdruck (der in günstigem Sinne wirkt) seinen gröſsten Werth erreicht. Mittels der Kämpferdrucklinie lässt sich leicht übersehen, welche Lasten auf die Kantenpressung ungünstig einwirken.

Fig. 205.

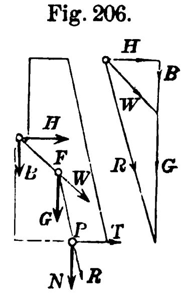


Hat die zu untersuchende Fuge RS (Fig. 205), soweit sie den Druck eines Bogenträgers aufnimmt, etwa rechteckige

Form $b \times d$ (wobei b rechtwinklig zur Bildebene liege), und ist K der innere Kernpunkt der Fuge, so erzeugt ein Kämpferdruck in der Richtung BK bei S bekanntlich eine Normalspannung Null (s. S. 144). Jeder Kämpferdruck, der die Fuge links von K schneidet, bringt bei S Zugspannung hervor, und umgekehrt. Schneidet also BK die Kämpferdrucklinie in N, so ist diese Stelle eine Einflussgrenze; jede Belastung links von N entspricht einer Druckspannung bei S. Bei gleichmäſsiger beweglicher Last p würde daher die in Fig. 205 gezeichnete Belastung die gefährlichste für das Umkanten des Pfeilers sein. Zieht man noch durch K eine Lothrechte, so muss auch der Pfeiler selbst noch rechts von dieser Lothrechten belastet werden.

Steht nun die Belastungsart fest, so kann man leicht den lothrechten Druck B und den Seitenschub H gegen den Pfeiler, sowie das Gewicht des letzteren (einschl. der darauf liegenden Last) bestimmen. Setzt man zunächst H und B mittels Kraftecks und Seilecks zum Kämpferdrucke W zusammen (Fig. 206) und vereinigt mit diesem noch das Gewicht G des Pfeilers (im Schnittpunkte F beider) zu der Mittelkraft R, so ist dies der Gesammtdruck auf die Fuge mit dem Angriffspunkte P. Man zerlegt nun R in eine Seitenkraft N rechtwinklig zur Fuge und eine Kraft T, welche in der Richtung der Fuge liegt. N ist dann eine excentrisch wirkende Normalkraft und liefert, falls P noch innerhalb des Kernes und im Abstande c von der Mitte liegt, bei S eine Druckspannung

Fig. 206.



$$1) \qquad \sigma = \frac{N}{b\,d}\left(\frac{6\,c}{d} + 1\right) \quad \text{(s. S. 156).}$$

Liegt aber P rechts vom Kerne und in einem Abstande t von der Kante S, so wird

$$2) \qquad \sigma = \frac{2}{3}\,\frac{N}{b\,t}\,.$$

(In diesem letzteren Falle hat freilich die Benutzung des Punktes K zur Ermittelung der ungünstigsten Belastungsart keine Berechtigung, jedoch ist dieser Umstand nicht von besonderer Wichtigkeit.)

Wäre der Pfeiler ein isotroper Körper, so würde man den Schnitt rechtwinklig zu R legen, um die Hauptspannung zu erhalten. Da man aber Mauerwerk gewöhnlich als aus einzelnen, lose über einander liegenden Schichten bestehend ansieht, so pflegt man die Schnitte in die Richtung der Lagerfugen zu legen. Aufser N ist nun auch noch eine Schubkraft T wirksam, die von dem Reibungswiderstande aufgenommen werden kann, solange der Winkel zwischen R und N den Reibungswinkel für Mauerwerk nicht überschreitet; diese Kraft erzeugt in den Steinen Schubspannungen, welche im Allgemeinen bewirken, dass die Anstrengung gröfser wird als die Normalspannung. Berücksichtigen lässt sich dieser Umstand aber nur bei isotropen Körpern, für welche man die Ziffer m der Querdehnung kennt. Uebrigens dürfte auch an den äufseren Kanten die Schubspannung Null sein. Daher betrachtet man σ nach der Gl. 1 u. 2 als Mafs der Anstrengung des Mauerwerks, kann aber die Lagerfugen rechtwinklig zu R legen.

Wäre der Pfeiler (Fig. 205) ein Mittelpfeiler, an den sich rechts wiederum ein (in der Figur nicht gezeichneter) Bogenträger mit einem linksseitigen Kämpfergelenke A_1 anschliefst, so hätte man noch die Gerade KA_1 bis zum Schnitt N_1 mit der Kämpferdrucklinie des rechtsseitigen Bogenträgers zu ziehen und müsste dann die bewegliche Last rechts von dem Pfeiler bis zu N_1 fortsetzen, um die stärkste Kantenpressung bei S zu erhalten.

Die Gefahr des Gleitens des oberen Pfeilertheiles in Folge der Wirkung von H ist am gröfsten in derjenigen Lagerfuge, die zunächst unter dem Kämpfergelenke liegt. Zieht man durch B (Fig. 207) eine Gerade, die von der Rechtwinkligen zur Lagerfuge um den Reibungswinkel φ abweicht und die Kämpferdrucklinie in N schneidet, so ist N für die Gefahr des Verschiebens ein Einfluss-Nullpunkt. Eine in N angebrachte Last ruft nämlich einen Kämpferdruck in der Richtung NB hervor, welcher eben so viel Seitenschub wie möglichen Reibungswiderstand liefert; jeder flacher gerichtete Kämpferdruck vergröfsert aber die Gefahr des Gleitens, und umgekehrt. Die Strecke links von N muss daher mit beweglicher Last

Fig. 207.

bedeckt sein, wenn die Gefahr des Gleitens am gröſsten werden soll. Berechnet man für diese Belastungsart H und B, so muss

$$H - B \operatorname{tg} \varphi \leqq G_1 \operatorname{tg} \varphi$$

sein, wenn G_1 das auf der Lagerfuge lastende Pfeilergewicht ist. Es bietet auch keine Schwierigkeiten, für $H - B \operatorname{tg} \varphi$ die Einflusslinie zu zeichnen, mit deren Hülfe dann auch Einzellasten in die ungünstigste Stellung gebracht werden können.

Elfter Abschnitt.

Bogenträger mit zwei Kämpfergelenken.

I. Biegung krummer Stäbe.

Durch Fortlassung des Scheitelgelenkes geht eine Gleichgewichts-Bedingung verloren, die durch eine Gleichung aus der Biegungslehre ersetzt werden muss. Der Bogen mit nur 2 Gelenken ist daher einfach statisch unbestimmt. Die Formeln für die Biegung gerader Stäbe sind hier nicht verwendbar, müssen vielmehr für krumme Stäbe verallgemeinert werden. Jedoch wollen wir zur Vereinfachung sogleich die Annahme machen, dass die Krümmungshalbmesser der Mittellinie des Stabes groſs seien im Verhältnisse zur Höhe seines Querschnittes.

Fig. 208.

Es sei BC (Fig. 208) die (einfach gekrümmte) Mittellinie eines Stabes im spannungslosen Zustande. Die Krümmungsebene schneide sämmtliche Querschnitte in Hauptachsen. Bei P werde ein Schnitt geführt, und alle äuſseren Kräfte links davon mögen zu der in der Krümmungsebene liegenden Mittelkraft R vereinigt sein; dann lässt sich diese durch die punktirten Kräfte N und Q und das Kräftepaar vom Momente M ersetzen. Fügt man nämlich zu dem gegebenen R zwei gleiche, einander entgegengesetzte Kräfte R im Punkte P hinzu, so bilden die gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte Kraft R das Kräftepaar M, während das übrig bleibende R im Punkte P zerlegt wird in die Längskraft (Normalkraft) N und die Querkraft Q.

Das Biegungsmoment M bringt nur eine Verbiegung der Mittellinie hervor. Entsprach also einem Bogentheilchen ds ein

Centriwinkel $d\varphi$, so wird letzterer um $\Delta d\varphi$ vergrößert werden. Diese Aenderung kann man finden, indem man vom geraden Stabe ausgeht und den ursprünglichen Krümmungshalbmesser ρ_1 zunächst als Wirkung eines Biegungsmomentes M_1 betrachtet, so dass (nach S. 33)

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M_1}{EJ}.$$

Tritt nun noch ein Moment M hinzu und entsteht daraus die Krümmung $1:\rho$, so ist

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1 + M}{EJ}.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab und schreibt die Krümmungsänderung $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$, so wird

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{M}{EJ}.$$

Weil aber $\rho\, d\varphi = ds$ oder $1:\rho = d\varphi : ds$, und weil ds durch M keine Aenderung erfährt, so wird

$$1)\qquad \frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ}.$$

Die centrisch wirkende Längskraft N bedingt eine Bogenverlängerung Δds, für welche

$$2)\qquad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF}.$$

Die der Querkraft Q entsprechende Formänderung wird vernachlässigt, wie das auch bei der Berechnung der durchgehenden Träger (S. 80) geschah.

Es sollen nun die gegenseitigen Verrückungen zweier Punkte der Mittellinie aufgesucht werden, welche durch die Formänderungen der einzelnen Theile entstehen, wie dies für den geraden Stab auf S. 35 u. 36 erfolgte.

Fig. 209.

Erfährt ein Längentheilchen bei P (Fig. 209) eine Vergrößerung des Centriwinkels um $\Delta d\varphi$, so verdreht sich, wenn der linksseitige Theil festgehalten wird, der rechtsseitige von P bis C um diesen Winkel. Will man nun die hierdurch erfolgende

Verrückung v des Punktes C in einer bestimmten Richtung CD ermitteln, so projicirt man den Bogen $CC_1 = \overline{PC} \cdot \Delta d\varphi$, welchen der Punkt C beschreibt, auf CD. Schliefst CC_1 mit CD den Winkel α ein, so ist diese Projektion

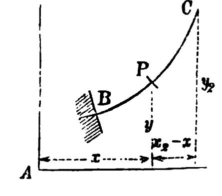
$$v = CC_1 \cos\alpha = \overline{PC} \cdot \Delta d\varphi \cdot \cos\alpha .$$

Fällt man aber von P auf CD die Winkelrechte $PQ = \eta$, so ist $\overline{PC} \cdot \cos\alpha = \eta$, mithin

3) $$v = \eta \cdot \Delta d\varphi .$$

Ist nun der Stab BC (Fig. 210) bei B (dessen Koordinaten x_1 und y_1) festgehalten und erfolgt bei P (mit den Koordinaten x und y) eine Verbiegung um $\Delta d\varphi$, so erfährt der Endpunkt C (der Koordinaten x_2 und y_2) eine wagerechte Verrückung

Fig. 210.



$$v_x = -(y_2 - y)\,\Delta d\varphi ,$$

weil der Abstand η des Punktes P von der Wagerechten durch C offenbar $y_2 - y$ ist; das negative Zeichen drückt aus, dass die Verrückung eine Verkleinerung von x_2 bedeutet. Ebenso wird in lothrechtem Sinne

$$v_y = (x_2 - x)\,\Delta d\varphi .$$

In Folge der Bogenverlängerung des Theilchens ds um Δds verschiebt sich aber das Stück PC, also auch der Punkt C, parallel mit ds um Δds, d. h. in wagerechtem Sinne um $\frac{\Delta ds}{ds}dx$, in lothrechtem Sinne um $\frac{\Delta ds}{ds}dy$.

Erleiden nun alle Theilchen des Stabes Verbiegungen und Verlängerungen, so ändert sich der gesammte Centriwinkel oder Kontingenzwinkel $\varphi_2 - \varphi_1$ zwischen B und C um

$$\Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = \int \Delta d\varphi$$

(φ_1 und φ_2 seien die Neigungswinkel des Bogens gegen die x-Achse bei B bezw. C); die wagerechte Verschiebung von C gegen B beträgt

$$\Delta(x_2 - x_1) = -\int (y_2 - y)\,\Delta d\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds}\,dx ,$$

die lothrechte:

$$\Delta(y_2 - y_1) = \int (x_2 - x)\,\Delta d\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds}\,dy ,$$

wobei die Integrationen sich auf die Strecke BC beziehen. Führt man nun die Werthe der Gl. 1 u. 2 (S. 225) ein, so wird, weil x_2 und y_2 bezüglich der Integrationen unveränderlich sind,

$$4)\quad \Delta(\varphi_2-\varphi_1)=\int_{x=x_1}^{x=x_2}\frac{M}{EJ}\,ds,$$

$$5)\quad \Delta(x_2-x_1)=\int_{x=x_1}^{x=x_2}\frac{My}{EJ}\,ds-y_2\int_{x=x_1}^{x=x_2}\frac{M}{EJ}\,ds+\int_{x=x_1}^{x=x_2}\frac{N}{EF}\,dx,$$

$$6)\quad \Delta(y_2-y_1)=x_2\int_{x=x_1}^{x=x_2}\frac{M}{EJ}\,ds-\int_{x=x_1}^{x=x_2}\frac{Mx}{EJ}\,ds+\int_{x=x_1}^{x=x_2}\frac{N}{EF}\,dy.$$

Dies sind die Grundgleichungen für die Formänderung eines krummen Stabes, aus denen die erforderlichen Elasticitätsgleichungen für Bogenträger mit weniger als 3 Gelenken entwickelt werden können.

Beispiel. Berechnung eines kreisförmigen Kettengliedes. Wird ein geschlossener Kreisring nach Fig. 211 belastet, so wird er seine Form etwas ändern, aber wegen der Symmetrie der Anordnung zu seiner lothrechten wie zu seiner wagerechten Mittellinie symmetrisch bleiben. Die Querschnitte bei A und B werden daher ihre lothrechte bezw. wagerechte Richtung beibehalten, d. h. es wird zwischen A und B $\Delta(\varphi_2-\varphi_1)=0$. Hieraus folgt nach Gl. 4 (s. oben) $\int\frac{M\,ds}{EJ}=0$, oder bei überall gleichem Querschnitte

Fig. 211.

$$7)\quad \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} M\,ds=0.$$

Denkt man sich den Ring bei A wagerecht eingespannt, bei B durchschnitten (Fig. 212), so tritt an dieser Stelle eine Längskraft $^1/_2\,P$ und ein statisch unbestimmtes Moment M_1 auf, welches nun mit Hülfe vorstehender Gl. 7 berechnet werden kann. Für eine beliebige, durch den Winkel φ bezeichnete Stelle P ist das Moment

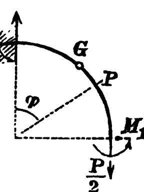


Fig. 212.

$$8)\quad M=M_1-{}^1/_2\,Pr\,(1-\sin\varphi).$$

Setzt man dies in Gl. 7 ein und vertauscht ds mit $r\,d\varphi$, so wird

$$M_1 r\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi-\frac{Pr^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi+\frac{Pr^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=0$$

oder

9) $$M_1 = \frac{P}{2} r \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Durch Einführung dieses Werthes in Gl. 8 wird dann

10) $$M = \frac{P}{2} r \left(\sin\varphi - \frac{2}{\pi}\right).$$

Für $\varphi = 0$ entsteht $-M_0 = -P\frac{r}{\pi}$ als größtes negatives Moment, während sich für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ als größtes positives Moment M_1 ergiebt. Dem Zahlenwerthe nach ist mithin $M_0 = P\frac{r}{\pi}$ das überhaupt größte Moment.

Für $\sin\varphi = 2/\pi$ oder für $\varphi = 39^0\,32'$ wird $M = 0$; an dieser Stelle G kann man ein Gelenk anbringen, ohne dass dadurch Spannung und Formänderung beeinflusst werden. Verlängert man den Kreisbogen noch bis zu dem unteren Gelenke G_1 (Fig. 213) und hängt an diesem eine Last $\frac{1}{2}P$ auf, so sind die Spannungsverhältnisse am übersichtlichsten. Setzt man annähernd $\pi = 3$, so bekommt man die Lage der Gelenkpunkte einfach durch Dreitheilung des wagerechten Halbmessers r. Der Querschnitt bei A ist dann einfach auf ein Moment $\frac{1}{2}P \cdot \frac{2}{3}r = \frac{1}{3}Pr$ zu berechnen (zu dem noch eine Querkraft $Q = \frac{1}{2}P$ hinzutritt), während bei B die alleinige Wirkung einer excentrischen Zugkraft $\frac{1}{2}P$ mit der Excentricität $\frac{1}{3}r$ in Frage kommt. Weitere Untersuchung ergiebt, dass A der gefährliche Querschnitt ist.

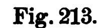
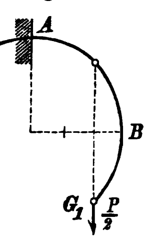


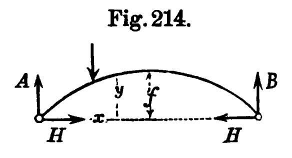
Fig. 213.



II. Bogenträger mit 2 Kämpfergelenken in gleicher Höhe.

Der Bogenträger sei ein stabförmiger Körper, dessen Mittellinie nach der Kurve AB (Fig. 214) gestaltet ist. Bei A und B befinden sich (reibungslose) Gelenke. Zerlegt man die Kämpferdrücke in A und H bezw. B und H, so werden A und B ebenso groß wie bei einem einfachen Balken, da die Momentengleichungen in Bezug auf A und B ebenso ausfallen. Der Seitenschub H aber, der beim Bogen mit 3 Gelenken mittels der Momentengleichung für das Scheitelgelenk bestimmt werden konnte, wird hier **statisch** unbestimmbar, kann jedoch mit Hülfe der Elasticitätsgleichung 5 (S. 227) gefunden werden, sobald feststeht, dass die Bogensehne $AB = l$ eine unveränderliche Länge hat, oder (all-

Fig. 214.



gemeiner) sich um ein bestimmtes Maſs Δl vergröſsert. Wählt man AB zur x-Achse und die Lothrechte durch A zur y-Achse, so sind x_1 und x_2 mit 0 bezw. l, y_1 und y_2 beide mit 0 zu vertauschen; sonach entsteht

$$1)\qquad \Delta l = \int_{x=0}^{x=l} \frac{My}{EJ}\,ds + \int_{x=0}^{x=l} \frac{N}{EF}\,dx\,.$$

Auch hier ist es räthlich, das Moment M' des entsprechenden einfachen Balkens einzuführen, weil zu den an diesem wirkenden äuſseren Kräften nur der Seitenschub H hinzugetreten ist. Dann wird $M = M' - Hy$ und

$$2)\qquad \Delta l = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M'y}{EJ}\,ds - H\cdot\int_{x=0}^{x=l} \frac{y^2}{EJ}\,ds + \int_{x=0}^{x=l} \frac{N}{EF}\,dx\,.$$

III. Flacher Parabelbogen überall gleichen Querschnitts mit zwei Gelenken.

Unter Annahme parabolischer Form der Mittellinie des Bogenträgers beliebig veränderlichen Querschnitts ergeben sich bei der Integration durch den Quotienten $ds:J$ Schwierigkeiten; sind aber F und J unveränderlich und ist der Bogen so flach, dass ds mit seiner Horizontalprojektion dx vertauscht werden kann, so wird die Rechnung einfach. (Diese Vereinfachung bleibt auch noch bestehen, wenn das Trägheitsmoment J nach dem Auflager hin zunimmt, jedoch in gleichem Verhältnisse mit $ds:dx$, so dass man dann, wenn J_c das Trägheitsmoment im Scheitel, $ds:J$ mit $dx:J_c$ vertauschen kann.)

Führt man an beliebiger Stelle (x, y) einen Schnitt durch den Bogenträger, u. zw. rechtwinklig zu seiner Mittellinie, und verschiebt die sämmtlichen äuſseren Kräfte links vom Schnitte parallel an den Schwerpunkt desselben (unter gleichzeitiger Hinzufügung entsprechender Kräftepaare), so bildet die Kraft H mit der Mittellinie des Bogens wegen seiner flachen Form nur einen kleinen Neigungswinkel φ, und H liefert zu der Längskraft N (Fig. 208, S. 224) einen (wegen der Druckwirkung) negativen Beitrag $-H\cos\varphi$, der mit $-H$ vertauscht werden

kann; die Beiträge der lothrechten Kräfte zu N können wohl vernachlässigt werden, weil ihre Neigungswinkel gegen N nur wenig von rechten Winkeln abweichen. Demnach wird annähernd $N = -H$, und wenn man in Gl. 2, S. 229 alle Glieder mit EJ multiplicirt, so entsteht:

$$EJ\Delta l = \int_{x=0}^{x=l} M' y\, dx - H \int_{x=0}^{x=l} y^2\, dx - H\frac{J}{F} l.$$

Hierin ist $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$ zu setzen, wenn f die Pfeilhöhe der Parabel. Da aber $y\,dx$ ein lothrechter Flächenstreifen der Parabelfläche (Fig. 215) und $^1/_2\, y$ der Abstand seines Schwerpunktes von der Sehne, so ist $^1/_2 \int_0^l y^2\, dx$ das statische Moment der Parabelfläche in Bezug auf die Sehne, mithin

Fig. 215.

$$\int_0^l y^2\, dx = 2 \cdot {}^2/_3\, l f \cdot y_0 = {}^4/_3\, l f \cdot {}^2/_5\, f = {}^8/_{15}\, l f^2.$$

Für jede Belastungsart des flachen Parabelbogens gilt also

$$1)\qquad H\left(\frac{8}{15} f^2 + \frac{J}{F}\right) l + EJ\Delta l = \frac{4f}{l^2}\int_0^l M' x(l-x)\, dx.$$

Es soll nun zunächst die Wirkung einer **Einzellast** P im Abstande u von der Lothrechten bei A berechnet werden, weil sich auf diese jede andere Belastung leicht zurückführen lässt.

An der Belastungsstelle bringt solche Last P bei dem einfachen Balken das Moment $Pu(l-u)\cdot {}^1/_l$ hervor; die Darstellung der Momente zeigt Fig. 216. An einem Schnitte links von der Last ist

Fig. 216.

$$M' = P\frac{l-u}{l} x,$$

an einem Schnitte rechts aber

$$M' = P\frac{u}{l}(l-x).$$

Daher ist allgemein

$$\int_{x=0}^{x=l} M' y\, ds = P\frac{l-u}{l}\int_{x=0}^{x=u} x\, y\, ds + P\frac{u}{l}\int_{x=u}^{x=l}(l-x)\, y\, ds$$

und für flache Parabelbögen

$$\int_0^l M' x\,(l-x)\,dx = P\frac{l-u}{l}\int_0^u x^2\,(l-x)\,dx + P\,\frac{u}{l}\int_u^l x\,(l-x)^2\,dx$$
$$= {}^1/_{12}\,P u\,(l^3 - 2\,l\,u^2 + u^3)\,.$$

Letzterer Klammerausdruck ist aber durch $l-u$ theilbar, so dass man schreiben kann

$$\int_0^l M' x\,(l-x)\,dx = {}^1/_{12}\,P l^2 u\,(l-u)\left(1 + \frac{u}{l} - \frac{u^2}{l^2}\right).$$

Der letzte Faktor, der die rechte Seite der Gleichung einigermaſsen verwickelt macht, ist so wenig veränderlich, dass man dafür annähernd einen unveränderlichen Mittelwerth setzen kann.*) Stellt man nämlich $1 + \frac{u}{l} - \frac{u^2}{l^2}$ als Funktion von $\frac{u}{l}$ bildlich dar, so erhält man die, oben durch eine Parabel begrenzte Fig. 217, und zwar ist

Fig. 217.

$$\text{für } \frac{u}{l} = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$$
$$f\left(\frac{u}{l}\right) = 1 \quad \frac{5}{4} \quad 1.$$

Gleicht man die obere Parabelfläche durch eine wagerechte Gerade aus, so liegt letztere um $1 + {}^2/_3 \cdot {}^1/_4 = {}^7/_6$ über der unteren Achse; mithin ist ${}^7/_6$ der Mittelwerth jener Funktion, wofür man aber zweckmäſsig die wenig gröſsere Zahl ${}^6/_5$ setzt (vgl. S. 234). Dann wird

$$\int_0^l M' x\,(l-x)\,dx = {}^1/_{10}\,P l^2 u\,(l-u)\,.$$

Führt man dies nun in Gl. 1 ein und theilt noch auf beiden Seiten durch ${}^8/_{15}\,l f^2$, so wird

$$2)\qquad H\left(1 + \frac{15}{8}\frac{J}{F f^2}\right) + \frac{15}{8}\frac{E J}{f^2}\frac{\Delta l}{l} = \frac{3}{4} P\,\frac{u\,(l-u)}{l f}\,.$$

Die Vergröſserung des Abstandes der beiden Kämpfergelenke um Δl wird häufig eine durch den Schub H verursachte elastische Verschiebung sein. Man kann sich nun auch vorstellen, dass

*) Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, S. 34. Vergl. auch Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1881, S. 62.

die Gelenke durch eine geradlinig dazwischen angebrachte Spannstange vom Querschnitte F_1 zusammengehalten werden; die Kraft H bewirkt dann eine Verlängerung der Stange um

$$\Delta l = \frac{H l}{E F_1}.$$

Setzt man dies in Gl. 2 ein, so wird

$$H\left(1 + \frac{15}{8}\frac{J}{F f^2} + \frac{15}{8}\frac{J}{F_1 f^2}\right) = \frac{3}{4} P \frac{u(l-u)}{l f}.$$

Schreibt man zur Abkürzung

3) $$1 + \frac{15}{8}\frac{J}{F f^2} + \frac{15}{8}\frac{J}{F_1 f^2} = 1 + \zeta,$$

so entsteht

4) $$H = \frac{3}{4} P \frac{u(l-u)}{l f (1+\zeta)}.$$

Der erste Summand 1 der linken Seite der Gl. 3 berücksichtigt (wie aus der Entwickelung hervorgeht) die Verbiegung des Bogens durch die Momente, der zweite mit F behaftete die Verkürzung der Mittellinie des Bogens in Folge der Druckwirkung von H, der dritte endlich den Einfluss eines Ausweichens der Widerlager. Die letzten beiden Einflüsse wirken in gleichem Sinne: ob die Gelenke ihre Lage behalten und die Mittellinie des Bogens sich aus irgend einer Ursache verkürzt, oder ob der Bogen seine Länge behält und die Widerlager ausweichen, hat auf den Schub H denselben vermindernden Einfluss.

In sehr vielen Fällen wird man die Kämpfergelenke als unverschieblich oder $\Delta l = 0$ annehmen können; man braucht dann nur den Querschnitt der Spannstange $F_1 = \infty$ einzuführen (da eine solche Spannstange durch die endliche Kraft H keine Längenänderung erfährt), womit das aus Δl hervorgegangene Glied verschwindet. In solchen Fällen ist ζ meist ein kleiner Bruch, der zuweilen (wenigstens vorläufig) gegenüber der Einheit vernachlässigt wird. Ist z. B. der zu J gehörige Trägheitshalbmesser $i = {}^1/_{10} f$, so wird $\frac{J}{F f^2} = \frac{1}{100}$ und $1 + \zeta = 1 + 0{,}019$, d. h. nur wenig gröfser als 1.

IV. Kämpferdrucklinie und Einflusslinien für den flachen Parabelbogen.

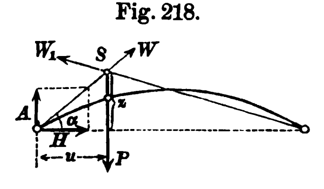
Einflusslinie für den Seitenschub H. Betrachtet man in vorstehender Gl. 4 die Gröfse u als veränderlich und H als $f(u)$, so

ist die Darstellung derselben eine Parabel mit lothrechter Achse, weil das Veränderliche in der Form $u(l-u)$ erscheint. Setzt man, um zur Einflusslinie für H zu gelangen, $P=1$, so wird für $u=\frac{l}{2}$ $H=\frac{3}{16}\frac{l}{f(1+\zeta)}$; dies ist die Pfeilhöhe der parabolischen H-Linie.

Die krummlinige Form der Einflusslinie weist darauf hin, dass es bei statisch unbestimmten Bogenträgern nicht gestattet ist, bei der Berechnung von H Lasten zu zerlegen oder zusammenzusetzen.

Kämpferdrucklinie. Nachdem mit Hülfe der Biegungslehre der Seitenschub H gefunden ist, kann nun auch die Kämpferdrucklinie mit derselben Bedeutung wie beim Bogen mit 3 Gelenken (S. 212) leicht ermittelt werden. Erzeugt eine Last P die Kämpferdrücke W und W_1, so schneidet sie sich mit beiden in einem Punkte S der Kämpferdrucklinie. Die Abscisse dieses Punktes ist diejenige der Last, nämlich u, seine Höhe über der Bogensehne sei z. Nennt man den Neigungswinkel des linksseitigen Kämpferdruckes α, so ist $\operatorname{tg}\alpha = z:u$; außerdem ist aber auch $\operatorname{tg}\alpha = A:H$, weil A und H die beiden Seitenkräfte von W; daher wird

Fig. 218.



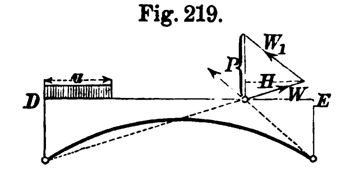
$$z=\frac{A}{H}u.$$

Setzt man für A und H (Gl. 4, S. 232) die bekannten Werthe ein, so ergiebt sich

$$5)\qquad z=\frac{P\frac{l-u}{l}}{\frac{3}{4}\frac{Pu(l-u)}{lf(1+\zeta)}}u=\frac{4}{3}f(1+\zeta).$$

Da z von u unabhängig, so ist die Kämpferdrucklinie DE (Fig. 219) eine wagerechte Gerade in der Höhe $\frac{4}{3}f(1+\zeta)$ über der Bogensehne, wofür man bei kleinem ζ zuweilen annähernd $\frac{4}{3}f$ setzen kann.

Fig. 219.



Mit Hülfe dieser Linie kann man nun die einer Einzelkraft P entsprechenden Kräfte W und W_1 und daraus auch H, A und B

leicht durch Zeichnung finden, wie auf der rechten Seite der Fig. 219 angedeutet ist. Denn die Lage von P bestimmt die Richtungen W und W_1 und damit das aus P, W und W_1 bestehende Kräftedreieck. Die wagerechte Projektion von W und W_1 ist dann H, während die lothrechten Projektionen A bezw. B liefern.

Seitenschub bei gleichmäfsiger Belastung einer Strecke. Ersetzt man die Einzellast P im Abstand u von A durch das Theilchen $p \cdot du$ einer stetigen Belastung, so entsteht der Seitenschub

$$dH = \frac{3}{4} \frac{p \cdot du\,(l u - u^2)}{l f (1 + \zeta)}.$$

Integrirt man dies zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = u$, so ergiebt sich

$$6) \quad H = \frac{3}{4} \frac{p}{l f (1 + \zeta)} \left(\frac{l u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) = \frac{p\, l^2}{8 f (1 + \zeta)} \frac{u^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{u}{l} \right)$$

für den Belastungsfall, welcher an der linken Seite der Fig. 219 angegeben ist.

Ist die eine Hälfte gleichmäfsig über ihre wagerechte Projektion belastet ($u = \frac{1}{2} l$), so wird

$$7) \quad H = \frac{p\, l^2}{16 f (1 + \zeta)};$$

ist der ganze Bogen belastet ($u = l$), so wird

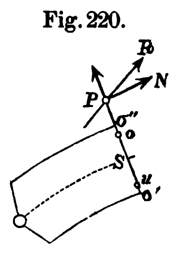
$$8) \quad H = \frac{p\, l^2}{8 f (1 + \zeta)}.$$

Denkt man sich den parabolischen Bogenträger durch eine Verbindung sehr vieler kurzer Gelenkstangen ersetzt, die aber nicht aus elastischem, sondern völlig starrem Materiale bestehen, so wird diese Stangenverbindung bei parabolischer Gestalt und gleichmässiger Belastung des gesammten Grundrisses im (wenn auch unsicheren) Gleichgewichte sein können; die Biegungsmomente sind dann Null und der Seitenschub bekanntlich $H = \frac{p l^2}{8 f}$. Dieser gleiche Werth muss aber auch für den Bogenträger gelten, sobald man die Verkürzung seiner Mittellinie (also ζ) vernachlässigt. Da Gl. 8 dieser Bedingung entspricht, so ist ersichtlich, dass die Vertauschung der Zahl $\frac{7}{6}$ mit $\frac{6}{5}$ (auf S. 231) eine Verbesserung war, die offenbar die zur Vereinfachung der Rechnung eingeführten Vernachlässigungen in ihrer Wirkung ausgleicht (wenigstens bei halber und voller Belastung).

Einflusslinien für die Kernmomente. Ist R die Mittelkraft aus dem Kämpferdrucke und den Belastungen links von

einem Schnitte und schneidet R die Querschnittsebene in P (Fig. 220), so kann sie dort in eine Querkraft und die Längskraft N zerlegt werden. Letztere ist dann eine excentrische Druckkraft und erzeugt an den Kanten des Bogenträgers Normalspannungen σ' und σ'', welche nach S. 152 und 153 betragen:

Fig. 220.



$$\sigma'' = \frac{N}{F}\frac{c+k''}{k''}$$

$$\sigma' = \frac{N}{F}\frac{c-k'}{k'}.$$

Hierin bedeutet σ'' einen Druck, σ' einen Zug; für das Folgende ist es aber zweckmäfsig, auch σ'' als Zug aufzufassen. Bezeichnet man den oberen und unteren Kernpunkt des Querschnitts mit o bezw. u und bedenkt, dass nach Gl. 2 und 3, S. 144

$$k''e'' = k'e' = i^2 = J : F, \quad \text{also}$$

$$Fk'' = \frac{J}{e''} \quad \text{und} \quad Fk' = \frac{J}{e'},$$

so kann man auch schreiben

$$\sigma'' = -\frac{N \cdot \overline{Pu} \cdot e''}{J}, \quad \sigma' = \frac{N \cdot \overline{Po} \cdot e'}{J}.$$

Weil die Querkraft durch die Kernpunkte hindurchgeht, so ist $N \cdot \overline{Pu}$ auch zugleich das Moment der Mittelkraft R oder auch gleich der Momentensumme aller linkseitigen Kräfte in Bezug auf den unteren Kernpunkt und heifse daher kurz das Kernmoment M_u, während $N \cdot \overline{Po}$ ebenso das Kernmoment M_o genannt werden möge. Dann ist einfach

$$\sigma'' = -\frac{M_u e''}{J}, \quad \sigma' = \frac{M_o e'}{J}. \tag{9}$$

Diese Kernmomente sind positiv gedacht, wenn sie in gleicher Weise biegen wie die Momente am einfachen Balken, d. h. die Krümmungshalbmesser der Bogenlinie vergröfsern.

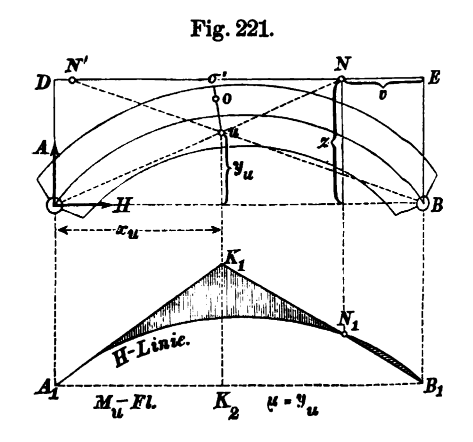
Will man nun σ'' und σ' für einen Querschnitt berechnen, so kann man dazu die Einflusslinien für M_u und M_o benutzen.

Die Koordinaten des unteren Kernpunktes seien x_u und y_u, dann kann man schreiben

$$10)\qquad M_u = M_u' - H y_u = y_u\left(\frac{M_u'}{y_u} - H\right).$$

Man wählt $\mu = y_u$ als Multiplikator, zeichnet die Einflussfigur für $M_u' : y_u$, indem man die Einflussordinate für das einfache Moment bei x_u, nämlich M_u', durch y_u theilt, und zieht davon die Ordinaten der parabolischen H-Linie ab, um die Einflussfigur für M_u zu bekommen. Eine Vereinfachung ergiebt sich aber, wie beim Bogen mit 3 Gelenken (S. 214), aus der Benutzung des Einfluss-Nullpunktes. Zieht man nämlich eine Gerade durch A und u bis zum Schnittpunkte N mit der Kämpferdrucklinie DE (Fig. 221), so ist N offenbar ein Einfluss-Nullpunkt. Schneidet die Lothrechte durch N die H-Linie in N_1, so zieht man $B_1 N_1 K_1$ bis zur Lothrechten durch u und sodann $A_1 K_1$. Die Ordinate von K_1 ist $K_1 K_2 = \dfrac{x_u(l - x_u)}{l y_u}$. Von B_1 bis N_1 sind die Einflüsse negativ, links davon positiv. Wenn eine Gerade durch B und u die Kämpferdrucklinie auch noch trifft, etwa in N', so ist, wie man leicht findet, N' noch ein zweiter Einfluss-Nullpunkt, und links davon entstehen dann nochmals negative Einflüsse. In nothwendiger Verbindung damit muss dann auch in der Einflussfigur die Gerade $A_1 K_1$ die Parabel in einem Punkte N_1' (lothrecht unter N') schneiden.

Fig. 221.



Aus der Einflussfigur lässt sich ersehen, wo die schwersten Lasten stehen müssen, um M_u möglichst grofs in positivem oder negativem Sinne zu machen.

Die Einflussfigur für M_o findet man in derselben Weise, wenn man den oberen Kernpunkt o an Stelle des unteren benutzt und $\mu = y_o$ als Multiplikator wählt.

Ist die bewegliche Belastung eine gleichförmig vertheilte, so lassen sich M_u und M_o ziemlich einfach berechnen*). Zunächst findet man den Abstand v des rechtsseitigen Nullpunktes N vom rechtsseitigen Auflager (Fig. 221) durch die geometrische Beziehung

$$\frac{x_u}{y_u} = \frac{l-v}{z} = \frac{l-v}{{}^4/_3 f(1+\zeta)}; \quad \text{es wird}$$

11) $$x_u = \frac{3}{4} y_u \frac{l-v}{f(1+\zeta)} \quad \text{und}$$

12) $$v = l - \frac{4}{3} f(1+\zeta) \frac{x_u}{y_u}.$$

Ebenso für den Abstand v' eines etwaigen linksseitigen Nullpunktes N' vom linksseitigen Auflager

13) $$v' = l - \frac{4}{3} f(1+\zeta) \frac{l-x_u}{y_u}.$$

Diese Gleichung hat keine Bedeutung, falls sie einen negativen Werth liefert; vielmehr ist dann $v' = 0$ zu setzen.

Die Belastung der Strecke v mit p bewirkt die Auflagerkräfte

$$A = \frac{pv^2}{2l} \quad \text{und} \quad H = \frac{pl^2}{8f(1+\zeta)} \frac{v^2}{l^2}\left(3 - 2\frac{v}{l}\right),$$

folglich das Kernmoment

$$M_{ur} = Ax_u - Hy_u = \frac{pv^2}{2l}\left\{x_u - \frac{y_u l}{4f(1+\zeta)}\left(3 - 2\frac{v}{l}\right)\right\},$$

oder wenn man nach Gl. 11 x_u auf y_u zurückführt:

$$M_{ur} = \frac{pv^2 y_u}{8f(1+\zeta)l}\left\{3(l-v) - 3l + 2v\right\} \quad \text{d. h.}$$

14) $$M_{ur} = -\frac{pv^3 y_u}{8lf(1+\zeta)}.$$

Ebenso wird für eine etwaige Belastung links von dem Nullpunkte N'

15) $$M_{ul} = -\frac{pv'^3 y_u}{8lf(1+\zeta)}.$$

Volle Belastung mit g liefert die Auflagerkräfte

$$A = \frac{gl}{2} \quad \text{und} \quad H = \frac{gl^2}{8f(1+\zeta)},$$

also das Kernmoment

$$M_{ug} = \frac{gl}{2}x_u - \frac{gl^2}{8f(1+\zeta)}y_u - \frac{gx_u^2}{2}$$

(das letzte Glied ist etwas zu grofs, aber bei flachen Bögen genau genug). Dies kann man auch schreiben

$$M_{ug} = \frac{gl^2}{8f(1+\zeta)}\left\{\frac{4f(1+\zeta)}{l^2}x_u(l-x_u) - y_u\right\}.$$

---

*) Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, S. 108.

Hat der Punkt, in welchem der Schnitt die Mittellinie des Bogens trifft, die Koordinaten x und y, so ist annähernd $x_u = x$, mithin

$$y = \frac{4f}{l^2} x_u (l - x_u),$$

und es wird einfacher

$$M_{ug} = \frac{g l^2}{8f(1+\zeta)} [y(1+\zeta) - y_u]. \tag{16}$$

Setzt man die geometrischen Glieder

$$\frac{v^3 y_u}{8lf(1+\zeta)} = \alpha; \quad \frac{v'^3 y_u}{8lf(1+\zeta)} = \alpha'; \quad \frac{l^2}{8f(1+\zeta)} [y(1+\zeta) - y_u] = \beta, \tag{17}$$

so wird

$$M_{ur} = -\alpha p; \quad M_{ul} = -\alpha' p; \quad M_{ug} = \beta g.$$

Eine Belastung zwischen N und N' ergänzt die Belastungen rechts und links von N bezw. N' zur vollen Belastung, erzeugt daher ein Kernmoment $M_u = p(\beta + \alpha + \alpha')$.

Das größte Kernmoment wird hiernach

$$\begin{cases} M_{u\,max} = g\beta + p(\beta + \alpha + \alpha') \quad \text{und das kleinste} \\ M_{u\,min} = g\beta - p(\alpha + \alpha'); \end{cases} \tag{18}$$

nach Gl. 9 (S. 235) ist dann

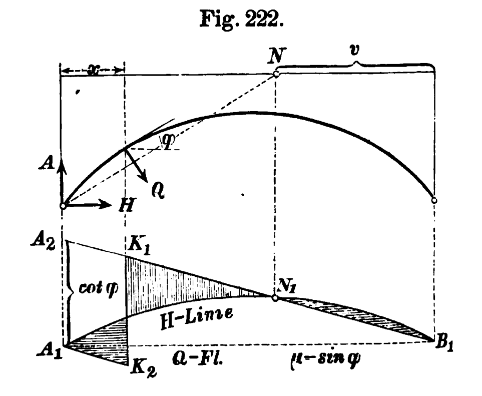
$$\sigma''_{min} = -\frac{e''}{J} M_{u\,max}; \quad \sigma''_{max} = -\frac{e''}{J} M_{u\,min}. \tag{19}$$

In ganz entsprechender Weise berechnet man M_0 und findet für die Spannung der Unterkante

$$\sigma'_{max} = \frac{e'}{J} M_{o\,max}; \quad \sigma'_{min} = \frac{e'}{J} M_{o\,min}.$$

Einflusslinie für die Querkraft. Ist φ der Neigungswinkel der Mittellinie des Bogens an der Schnittstelle (Fig. 222), so liefert die Kraft A, welche beim einfachen Träger mit dem vollen Betrage in der Querkraft Q' erschien, hier nur den Beitrag $A \cos\varphi$ zur Querkraft Q des Bogens, während H den Werth $-H \sin\varphi$ beiträgt. Daher wird

Fig. 222.



$$Q = Q' \cos\varphi - H \sin\varphi = \sin\varphi\,(Q' \cot\varphi - H). \tag{20}$$

Man wählt nun $\mu = \sin\varphi$ zum Multiplikator und hat die Einflussfigur für $Q' \cot\varphi - H$ zu zeichnen. Während also bei der

Einflussfigur für Q' (Fig. 76, S. 75) auf der Auflagerlothrechten die Krafteinheit aufgetragen werden musste, hat man hier $A_1 A_2 = \cot \varphi$ zu machen, $B_1 A_2$ zu ziehen und dazu parallel $A_1 K_2$. Von den Ordinaten dieser schrägen Geraden sind dann die Ordinaten der H-Linie abzuziehen. Der Punkt N_1, in dem $B_1 A_2$ die H-Linie schneidet, ist ein Einfluss-Nullpunkt. Dieser muss aber auch lothrecht unter dem Punkte N liegen, den man in der Figur des Bogenträgers findet, wenn man von A aus eine Linie rechtwinklig zur Schnittebene (also mit dem Neigungswinkel φ gegen die Wagerechte) bis zum Schnittpunkte N mit der Kämpferdrucklinie zieht. Denn eine in N wirkende Last erzeugt einen Kämpferdruck, der zur Schnittebene rechtwinklig steht und also keinen Beitrag zur Querkraft liefert. Positive und negative Einflüsse sind in der Figur durch lothrechte und wagerechte Schraffirung unterschieden.

Gleichmäfsige Belastung des ganzen Bogens würde für $\zeta = 0$ die Querkraft überall zu Null machen (vgl. S. 234); genau genug gilt dies auch noch bei kleinen Werthen von ζ. Die ständige Belastung braucht also zur Berechnung von Q nicht berücksichtigt zu werden. Wird nun die Strecke $l - x - v$ vom Schnitte bis zum Nullpunkte N mit p belastet, so erhält man (nachdem v geometrisch berechnet) leicht die entsprechenden Auflagerkräfte A und H, u. zw. letztere, indem man in Gl. 6 (S. 234) ein Mal $u = l - x$, das andere Mal $u = v$ setzt und beide H-Werthe von einander abzieht. (Ein negatives v ist selbstverständlich mit Null zu vertauschen.) Es wird dann $Q' = A$ und daher $Q_{max} = A \cos \varphi - H \sin \varphi$. Derselbe Werth mit negativem Zeichen giebt Q_{min}.

V. Temperatur-Spannungen im flachen Parabelbogen.

Bisher haben wir nur diejenigen Auflagerkräfte und Spannungen berechnet, die von B e l a s t u n g e n herrühren und mit diesen zu Null werden. Daneben giebt es aber bei statisch unbestimmten Bogenträgern auch noch T e m p e r a t u r - S p a n n u n g e n, die allein durch Temperatur-Aenderungen entstehen. Bei einer bestimmten G r u n d - T e m p e r a t u r passt der spannungslose Bogen genau zwischen die Kämpfergelenke. Erhöht sich aber seine Temperatur um t Grad C., so würde er, wenn er völlig frei wäre, sich nach allen Richtungen gleichmäfsig ausdehnen, und

seine Sehne würde um $l\varepsilon t$ wachsen, wenn ε die Wärmedehnungsziffer bedeutet. Da er durch die festen Gelenke hieran verhindert wird, so entsteht an jedem Gelenke ein Temperaturschub H_t, u. zw. sind diese beiden Schübe so groß, dass sie die Sehnenverlängerung $l\varepsilon t$ ausgleichen, d. h. für sich allein eine elastische Sehnenverkürzung von gleicher Größe bewirken würden. Man erhält daher H_t, wenn man in Gl. 2, S. 231 $\Delta l = -l\varepsilon t$ und die Last $P = 0$ setzt, nämlich

$$H_t\left(1 + \frac{15}{8}\frac{J}{Ff^2}\right) = H_t(1+\zeta) = \frac{15}{8}\frac{EJ}{f^2}\varepsilon t, \quad \text{also}$$

1)
$$H_t = \frac{15}{8}\frac{EJ}{f^2}\frac{\varepsilon t}{1+\zeta}.$$

Die dem Zahlenwerthe nach größte Temperaturspannung findet sich nach der Lehre vom excentrischen Druck offenbar im Bogenscheitel bei C (Fig. 223). Die Berechnung derselben soll nur unter der Annahme eines I-Querschnittes mit so dünner Wand erfolgen, dass annähernd $J = \frac{1}{4} F h^2$ und der Kernhalbmesser $k = \frac{1}{2} h$ gesetzt werden kann; auch soll ζ vernachlässigt werden. Dann wird

Fig. 223.

$$H_t = \frac{15}{8}\frac{EFh^2}{4f^2}\varepsilon t$$

und, weil die Excentricität $= f$, die Spannung an der Unterkante

2)
$$-\sigma' = \frac{H_t}{F}\left(\frac{2f}{h} + 1\right) = \frac{15}{16} E\varepsilon t\left(\frac{h}{f} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{f^2}\right).$$

Beispiel: Für $l = 8f$ und $l = 30h$ wird $h = \frac{8}{30}f$. Ist ferner $\varepsilon = 0{,}0000122$, $E = 2\,000\,000$, $t = 40^0$, so ergiebt sich $-\sigma' = 277^{\text{at}}$. Bei Temperatur-Erniedrigung würde eine gleich große Zugspannung entstehen.

Diese Temperatur-Spannungen treten zu den Belastungs-Spannungen hinzu und erhöhen diese nicht unbedeutend.

Selbstverständlich kann man die Temperatur-Spannungen nur berechnen, wenn man die Grund-Temperatur kennt, bei welcher der spannungslose Bogen genau zwischen die Kämpfergelenke passt. Man kann dieselbe finden, wenn man einerseits den Abstand der Kämpfergelenke, andererseits die Sehnenlänge des spannungslosen Bogens und seine Temperatur kennt.

Der statisch bestimmte Bogen mit drei Gelenken erfährt keine Temperatur-Spannungen, wenn bei einer Ausdehnung des Bogenträgers das Scheitelgelenk eine reibungslose Hebung gestattet. Auch beim Zweigelenkbogen fallen diese Spannungen fort, falls die Enden frei auflagern und nur durch eine Spannstange zusammengehalten werden, welche mit dem Bogen gleiche Temperatur hat.

VI. Kreisförmiger Bogenträger.

Flache Kreisbögen können nach den für Parabelbögen entwickelten Formeln berechnet werden, so dass im Folgenden besonders auf steilere Bögen Rücksicht zu nehmen ist. Als Ausgangspunkt dient wieder Gl. 2, S. 229:

$$\Delta l = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M' y\, d s}{E J} - H \int_{x=0}^{x=l} \frac{y^2\, d s}{E J} + \int_{x=0}^{x=l} \frac{N\, d x}{E F}.$$

Steile Bögen sind durch die Seitenkräfte H leichter zu verbiegen als flache, so dass die Einwirkung der Bogenverkürzung auf die Sehnenverlängerung hier vernachlässigt werden kann gegenüber der Wirkung der Verbiegung; wir lassen daher das mit N behaftete Glied fort. Nimmt man dann noch überall gleichen Querschnitt an, so ergiebt sich leicht

$$E J \Delta l = \int_{x=0}^{x=l} M' y\, d s - H \int_{x=0}^{x=l} y^2\, d s.$$

Diese Gleichung gilt noch für jeden Belastungszustand; für eine Einzellast P wird aber nach S. 230

$$\int_{x=0}^{x=l} M' y\, d s = P \frac{l-u}{l} \int_{x=0}^{x=u} x y\, d s + P \frac{u}{l} \int_{x=u}^{x=l} (l-x) y\, d s \qquad \text{und}$$

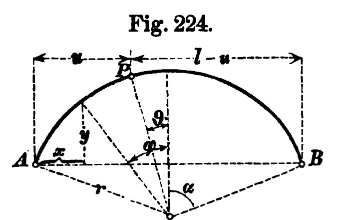
$$1)\qquad E J \Delta l = P \frac{l-u}{l} \int_{x=0}^{x=u} x y\, d s + P \frac{u}{l} \int_{x=u}^{x=l} (l-x) y\, d s - H \int_{x=0}^{x=l} y^2\, d s.$$

Der Werth $\int_{x=o}^{x=u} x y\, d s$ bedeutet das Centrifugalmoment des Stückes $A P$ (Fig. 224) der Mittellinie des Bogens in Bezug auf Wagerechte und Lothrechte durch A, $\int_{x=u}^{x=l} (l-x) y\, d s$ dasjenige des Bogenstückes $B P$ in Bezug

auf Achsen durch B, $\int_{x=o}^{x=l} y^2\,d\,s$ das Trägheitsmoment der ganzen Bogenlinie $A\,B$ in Bezug auf die Sehne. Diese Werthe lassen sich bei beliebiger Bogenform durch rechnerische oder zeichnerische Summation annähernd finden. Wird für flache Bogen $d\,s$ mit $d\,x$ vertauscht, so ist (einfacher) $\int_0^u x\,y\,d\,x$ das statische Moment der lothrecht unter $A\,P$ liegenden, bis zur Sehne reichenden Fläche in Bezug auf die Lothrechte durch A, $\int_u^l (l-x)\,y\,d\,x$ dasjenige der unter $B\,P$ liegenden Fläche in Bezug auf die Lothrechte durch B, $\int_0^l y^2\,d\,x$ das Doppelte des statischen Momentes der ganzen Fläche in Bezug auf die Sehne.

Für den Kreisbogen empfiehlt sich nun die Einführung der Winkelfunktionen. Es sei (Fig. 224) der halbe Centriwinkel des Bogens α, der Halbmesser der Mittellinie r; die Belastungsstelle möge durch den von der lothrechten Mittellinie aus gemessenen Winkel ϑ, die beliebige Schnittstelle durch den Winkel φ festgelegt sein. Dann wird

Fig. 224.



$$l = 2\,r \sin \alpha$$
$$u = r\,(\sin \alpha - \sin \vartheta)$$
$$l - u = r\,(\sin \alpha + \sin \vartheta)$$
$$x = r\,(\sin \alpha - \sin \varphi)$$
$$l - x = r\,(\sin \alpha + \sin \varphi)$$
$$y = r\,(\cos \varphi - \cos \alpha)$$
$$d\,s = r\,d\,\varphi\,,$$

und Gl. 1 geht über in

$$E\,J\,\Delta\,l = P\,\frac{\sin\alpha + \sin\vartheta}{2\sin\alpha}\,r^3 \int_{\varphi=\vartheta}^{\varphi=\alpha} (\sin\alpha - \sin\varphi)\,(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\,\varphi$$
$$+ P\,\frac{\sin\alpha - \sin\vartheta}{2\sin\alpha}\,r^3 \int_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\vartheta} (\sin\alpha + \sin\varphi)\,(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\,\varphi$$
$$- H\,r^3 \int_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=+\alpha} (\cos\varphi - \cos\alpha)^2\,d\,\varphi\,.$$

Wenn man die Integrationen ausführt und die etwa vorkommenden Quadrate und Produkte der trigonometrischen Funktionen

desselben Winkels durch die Funktionen des doppelten Winkels ausdrückt, so entsteht:

$$2)\quad EJ\Delta l = Pr^3\{-{}^1\!/_2 - {}^3\!/_4 \cos 2\alpha - {}^1\!/_2\, \alpha \sin 2\alpha + {}^1\!/_4 \cos 2\vartheta + \cos\alpha(\cos\vartheta + \vartheta\sin\vartheta)\} - Hr^3\{\alpha(2+\cos 2\alpha) - {}^3\!/_2 \sin 2\alpha\}.$$

Nimmt man nun wieder, wie auf S. 232, eine Spannstange vom Querschnitte F_1 an, wodurch

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF_1} = 2r\sin\alpha\frac{H}{EF_1}$$

wird, so entsteht, wenn man alle Glieder mit 4 multiplicirt und nach H auflöst:

$$3)\quad H = P\frac{-2-3\cos 2\alpha - 2\alpha\sin 2\alpha + \cos 2\vartheta + 4\cos\alpha(\cos\vartheta+\vartheta\sin\vartheta)}{4\alpha(2+\cos 2\alpha) - 6\sin 2\alpha + 8\dfrac{\sin\alpha J}{F_1 r^2}}.$$

Wenn man aber den Einfluss der Spannstange von den übrigen Gliedern ganz trennen und die Form der Gleichung für H in thunlichste Uebereinstimmung mit Gl. 4, S. 232 für den Parabelbogen bringen will, so setzt man

$$\frac{8\sin\alpha\cdot J}{F_1 r^2}\cdot\frac{1}{4\alpha(2+\cos 2\alpha) - 6\sin 2\alpha} = \zeta$$

und, weil $f = r(1-\cos\alpha)$, mithin $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{f^2}$,

$$4)\quad \zeta = \frac{J}{F_1 f^2}\,\frac{8\sin\alpha(1-\cos\alpha)^2}{4\alpha(2+\cos 2\alpha) - 6\sin 2\alpha};$$

dann wird

$$5)\quad H = P\frac{-2-3\cos 2\alpha - 2\alpha\sin 2\alpha + \cos 2\vartheta + 4\cos\alpha(\cos\vartheta+\vartheta\sin\vartheta)}{4\alpha(2+\cos 2\alpha) - 6\sin 2\alpha}\cdot\frac{1}{1+\zeta}.$$

Die Kämpferdrucklinie habe für eine beliebige Abscisse u wieder (wie beim Parabelbogen, S. 233) eine Ordinate z, von der Sehne aus gemessen (Fig. 225). Dann wird

$$6)\quad z = \frac{A}{H}u = \frac{P}{H}\frac{u(l-u)}{l},$$

weil auch hier $A = P\dfrac{l-u}{l}$ ist.

Der Halbkreisbogen. Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ bekommt die verwickelte Gl. 5 die einfache Form

7) $$H = P\frac{1+\cos 2\vartheta}{2\pi}\frac{1}{1+\zeta},$$

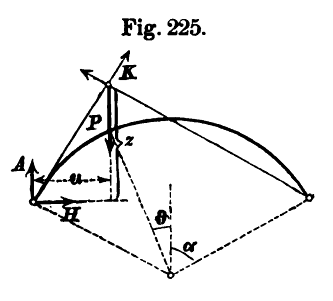


Fig. 225.

und nach Gl. 4 wird

8) $$\zeta = \frac{J}{F_1 f^2}\frac{4}{\pi} = 1{,}273\frac{J}{F_1 f^2}.$$

Die Ordinate der Kämpferdrucklinie aber wird, weil $u = r(1 - \sin\vartheta)$ und $l - u = r(1 + \sin\vartheta)$,

$$z = \frac{P}{H} r \frac{1-\sin^2\vartheta}{2} = \frac{r}{2}\frac{2\pi\cos^2\vartheta}{1+\cos 2\vartheta}(1+\zeta),$$

oder, weil $1 + \cos 2\vartheta = 2\cos^2\vartheta$ und $r = f$ ist,

9) $$z = r\frac{\pi}{2}(1+\zeta) = 1{,}571\, f(1+\zeta).$$

Da die rechte Seite von ϑ unabhängig, so wird z überall gleich, d. h. die Kämpferdrucklinie eine wagerechte Gerade, welche bei festen Widerlagern ($F_1 = \infty$ und $\zeta = 0$) in der Höhe

$$\frac{1}{2} r\pi = 1{,}571\, r = 1{,}571\, f$$

über der Sehne liegt.

Einführung einer Geraden als Kämpferdrucklinie. Die durch die Gleichungen 5 und 6 bestimmten Kämpferdrucklinien sind im Allgemeinen schwach gekrümmte Kurven, u. zw. nimmt die Krümmung mit wachsendem Winkel α ab. Da nun der flache Kreisbogen offenbar als Parabel angesehen werden kann, so darf man für diesen, mit demselben Rechte wie für den flachen Parabelbogen (S. 233), eine gerade Kämpferdrucklinie benutzen. Für den Halbkreis aber hat sich ebenfalls eine gerade Kämpferdrucklinie ergeben, und weil die nach Gl. 5 und 6 berechneten Linien sich mit wachsendem α mehr und mehr der Geraden nähern, so erscheint es gerechtfertigt, diese Kurven durch ausgleichende gerade Linien zu ersetzen und für Kreisbogenträger durchweg gerade Kämpferdrucklinien einzuführen.

Für sehr flache Bögen ($f : l = 0$) ist nach Gl. 5, S. 233, $z = 1{,}33\, f(1+\zeta)$; für den Halbkreis ($f : l = 0{,}5$) aber $z = 1{,}571\, f(1+\zeta)$; es wächst also $z : f$ mit wachsendem Pfeilhöhen-Verhältnisse. Berechnung und bildliche Darstellung zeigen, dass man die Beziehung zwischen z/f und f/l durch ein parabolisches Gesetz mit genügender Genauigkeit ausdrücken kann, u. zw. darf man setzen

10) $$z = \left(1{,}38 + \frac{3}{4}\frac{f^2}{l^2}\right) f(1+\zeta),$$

wobei ζ an Stelle von Gl. 4 genügend genau durch die einfache Formel

11) $$\zeta = \frac{J}{F_1 f^2}(1{,}27 + 0{,}6 \cos \alpha)$$

wiedergegeben wird.

Beim Parabelbogen besteht ζ (Gl. 3, S. 232) aus zwei Summanden, berücksichtigt nämlich auch die Verkürzung der Mittellinie des Bogens, welche wir hier vernachlässigen, so dass ζ beim Kreisbogen (Gl. 4, S. 243) nur den Einfluss der Spannstange darstellt. In der Formel für den flachen Parabelbogen ist daher ζ unter sonst gleichen Umständen etwas größer als in der Formel für den Kreisbogen. Dies ist der Grund, weshalb in Gl. 10 der erste Summand der rechten Seite nicht $^4/_3$ beträgt, wie nach Gl. 5, S. 233 zu erwarten gewesen wäre, sondern um einige Procente größer gesetzt wurde. Freilich müsste diese Vergrößerung streng genommen sich nach den besonderen Umständen eines Falles richten, doch schien es räthlich, der Einfachheit wegen den unveränderlichen Werth 1,38 zu benutzen, mit dem sich die Formel 10 besonders einfach gestalten ließ.

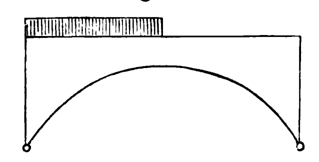
Mit der Wahl einer geraden Kämpferdrucklinie hängt aber eine parabolische Einflusslinie für H zusammen. Nach Gl. 6, S. 243 ist

12) $$H = P\frac{u(l-u)}{l z}.$$

Hat man also z mittels Gl. 10 berechnet, so kann man für den Seitenschub H, anstatt der verwickelten Gl. 5, S. 243, diese einfache Gl. 12 benutzen. Für $u = {}^1/_2\, l$ wird $H = P\frac{l}{4z}$; die Einflusslinie für H ist daher eine Parabel von der Pfeilhöhe $l : 4z$.

Seitenschub bei gleichmäßiger Belastung des Grundrisses. Vertauscht man in Gl. 5 (S. 243) P mit $p\,ds \cos\vartheta = p\,r \cos\vartheta\, d\vartheta$ und integrirt von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \alpha$, so erhält man den Seitenschub für die gleichmäßige Belastung der einen Hälfte des Grundrisses zu

Fig. 226.



13) $$H = \frac{pr}{6}\,\frac{\sin\alpha\,(1-\cos 2\alpha) - 6\cos 2\alpha\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{4\alpha\,(2+\cos 2\alpha) - 6\sin 2\alpha}\,\frac{1}{1+\zeta}.$$

Für gleichmäßige Belastung des ganzen Trägers wird H doppelt so groß.

Für den Halbkreis ($\alpha = {}^1/_2\,\pi$) wird aus Gl. 13:

14) $$H = \frac{2}{3\pi}\,\frac{pr}{1+\zeta} = 0{,}212\,\frac{pr}{1+\zeta};$$

für volle Belastung ist $H = 0{,}424\,\frac{pr}{1+\zeta}$.

Benutzt man aber Gl. 12, vertauscht P mit $p\,du$ und integrirt von $u = o$ bis $u = u$, so erhält man für eine gleichmäßige Belastung des Grundrisses auf eine Länge u, von einem Auflager beginnend,

$$15)\qquad H = \frac{p}{l\,z}\int_0^u (l\,u - u^2)\,du = \frac{p\,l^2}{6\,z}\,\frac{u^2}{l^2}\left(3 - 2\frac{u}{l}\right)$$

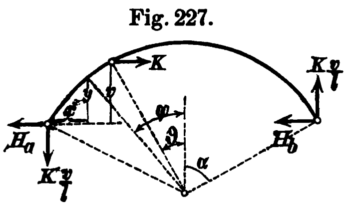
(entsprechend Gl. 6, S. 234). Hierin ist z nach Gl. 10 und 11, S. 245 zu bestimmen. Für $u = {}^1/_2\,l$ wird $H = \frac{p\,l^2}{12\,z}$. Setzt man dann für den Halbkreis $z = (1{,}38 + {}^3/_4 \cdot {}^1/_4)\,f(1 + \zeta) = 1{,}5675\,f(1 + \zeta)$, $l = 2\,r$ und $f = r$, so wird $H = 0{,}213\,\frac{p\,r}{1 + \zeta}$, was mit Gl. 14 genügend übereinstimmt. In allen diesen Fällen ist bei festen Widerlagern $\zeta = 0$.

Die ungünstigsten Belastungsarten und die stärksten Spannungen werden beim Kreisbogen in derselben Weise ermittelt wie beim flachen Parabelbogen.

VII. Kreisförmiger Bogenträger unter Einwirkung wagerechter Kräfte.

Ist ein kreisförmiger Bogen mit 2 Gelenken der Träger eines Daches, so wirken auf ihn durch den Winddruck auch schräg gerichtete Kräfte ein, die sich in senkrechte und wagerechte Seitenkräfte zerlegen lassen. Die Wirkung der ersteren ist nach dem Vorstehenden zu beurtheilen; es bleibt nur noch zu untersuchen, welche Auflagerwiderstände durch eine wagerechte Kraft hervorgerufen werden.

Fig. 227.



Der Angriffspunkt der wagerechten Kraft K sei durch den Winkel ϑ (Fig. 227) bestimmt und liege in der Höhe v über der Sehne; dann liefern die Momentengleichungen in Bezug auf die Kämpfergelenke die senkrechten Auflagerwiderstände $K\,v : l$, wie in der Figur angegeben. Die wagerechten Widerstände H_a und H_b werden beide als der Kraft K entgegengesetzt angenommen; statisch unbestimmt ist nur einer der beiden, etwa H_a, da $H_b = K - H_a$ sein muss. Der Einfachheit wegen sollen beide Gelenke als unverschieblich angenommen werden, dann ist, wenn man noch, wie auf S. 241, die durch die

Längskraft N bedingte Formänderung vernachlässigt, also in Gl. 1, S. 229 $\Delta l = 0$ und $N = 0$ setzt, bei unveränderlichen EJ

$$0 = \int M y \, d s .$$

Für einen Bogenpunkt rechts von K ist, wenn man das Stück rechts vom Schnitte betrachtet, das Moment

$$M_r = \frac{K v}{l}(l - x) - H_b y = \frac{K v}{l}(l - x) - (K - H_a) y,$$

für einen Schnitt links von K aber $M_l = -\frac{K v}{l} x + H_a y$, und es muss werden

$$0 = \int_{\varphi = -\alpha}^{\varphi = \vartheta} M_r y \, d s + \int_{\varphi = \vartheta}^{\varphi = \alpha} M_l y \, d s .$$

Setzt man nun wieder $v = r(\cos\vartheta - \cos\alpha)$; $l = 2 r \sin\alpha$; $x = r(\sin\alpha - \sin\varphi)$; $y = r(\cos\varphi - \cos\alpha)$; $d s = r\, d\varphi$, so entsteht

$$0 = \frac{K}{2}\frac{\cos\vartheta - \cos\alpha}{\sin\alpha}\int_{-\alpha}^{\vartheta}(\sin\alpha + \sin\varphi)(\cos\varphi - \cos\alpha)\, d\varphi$$

$$- K\int_{-\alpha}^{\vartheta}(\cos\varphi - \cos\alpha)^2\, d\varphi$$

$$- \frac{K}{2}\frac{\cos\vartheta - \cos\alpha}{\sin\alpha}\int_{\vartheta}^{\alpha}(\sin\alpha - \sin\varphi)(\cos\varphi - \cos\alpha)\, d\varphi$$

$$+ H_a\int_{-\alpha}^{+\alpha}(\cos\varphi - \cos\alpha)^2\, d\varphi .$$

Durch Ausführung der Integrationen erhält man dann

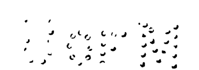
$$H_a = \frac{K}{2}\frac{2\alpha(2+\cos 2\alpha) - 3\sin 2\alpha + 2\vartheta - \sin 2\vartheta - 4\cos\alpha(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta)}{2\alpha(2+\cos 2\alpha) - 3\sin 2\alpha}.$$

Die ersten beiden Glieder des Zählers geben durch Division mit dem Nenner die Zahl 1; wenn man nun bedenkt, dass $H_b = K - H_a$, so lässt sich für H_a und H_b die gemeinsame Gleichung schreiben

$$1)\quad H_{\substack{a\\b}} = \frac{K}{2}\left\{1 \pm \frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta - 4\cos\alpha(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta)}{2\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 3\sin 2\alpha}\right\}.$$

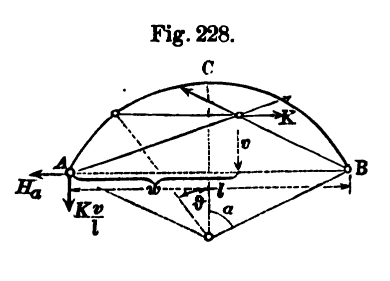
Für $\vartheta = \alpha$ wird $H_a = K$; $H_b = 0$;
„ $\vartheta = 0$ „ $H_a = H_b = \frac{1}{2} K$.

Beides ist auch unmittelbar einzusehen.



So lange der Angriffspunkt von K auf der linken Bogenhälfte liegt, ist $H_a > H_b$, daher der linksseitige Kämpferdruck flacher gerichtet als der andere; der Schnittpunkt beider Widerlagerkräfte mit K, d. h. der entsprechende Punkt der Kämpferdrucklinie, ist auf der rechten Seite gelegen (Fig. 228). Die Abscisse w desselben findet man aus der Gleichung $\frac{w}{v} = \frac{H_a}{K\frac{v}{l}}$ zu

Fig. 228.



$$2) \qquad w = l\,\frac{H_a}{K}.$$

Für $\vartheta = \alpha$ wird $v = 0$ und $w = l$, für $\vartheta = 0$ wird $v = f$ und $w = {}^1/_2\, l$. Zu Kräften K zwischen A und C gehört demnach eine von B nach C verlaufende Kämpferdrucklinie.

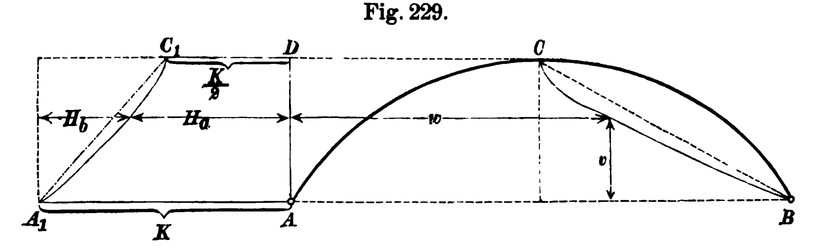
Für den Halbkreis ($\alpha = {}^1/_2\,\pi$) wird aus Gl. 1 und 2:

$$3) \qquad H_{\substack{a\\b}} = \frac{K}{2}\left(1 \pm \frac{2\,\vartheta - \sin 2\,\vartheta}{\pi}\right) \quad \text{und}$$

$$4) \qquad w = \frac{1}{2}\,l\left(1 + \frac{2\,\vartheta - \sin 2\,\vartheta}{\pi}\right).$$

Trägt man (Fig. 229) von einer Senkrechten AD aus die Werthe von H_a für $K = 1$ auf den Richtungslinien von K ab, so

Fig. 229.



bilden die Endpunkte die Einflusslinie $A_1\,C_1$ für H_a. Die Kämpferdrucklinie BC steht mit der Einflusslinie in enger Beziehung, da nach Gl. 2 (für gleiche Ordinaten) ihre Abscissen l-mal gröfser sind als die der Einflusslinie. Diese Kurven sind im unteren Theile schwach gekrümmt, gehen aber oben mit stärkerer Krümmung bei C bezw. C_1 in die lothrechte Richtung über.

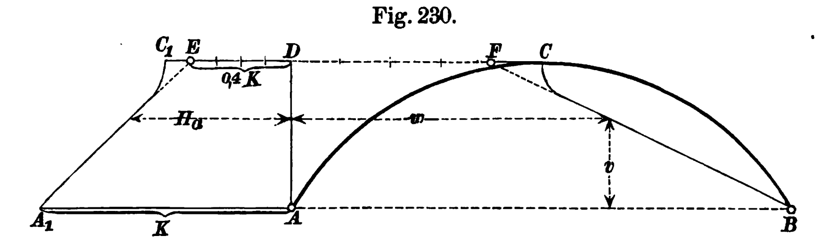
Die verwickelte Form der Gl. 1 legt den Wunsch nahe, für dieselbe eine einfache Annäherungsgleichung bezw. für ihre Darstellung $A_1 C_1$ eine einfachere Linie an die Stelle zu setzen. Am bequemsten ist es, die Kurven durch ihre Sehnen $A_1 C_1$ bezw. BC zu ersetzen. Die daraus folgenden Abweichungen betragen dann freilich bis zu etwa 10 %; sollen diese Rechnungen aber nur für die Einwirkung des Windes benutzt werden, so dürfte ein derartiger Fehler bei der Unsicherheit über die Bestimmung der einzuführenden Winddruck-Einheit wohl zulässig sein, wenn dadurch die Rechnung so erheblich vereinfacht wird. Die Wahl der geraden Linien ist nämlich gleichbedeutend mit der Annahme eines Scheitelgelenkes, so dass der Bogen dann gegenüber der Wirkung von wagerechten Kräften annähernd als ein statisch bestimmter Bogenträger mit 3 Gelenken behandelt werden kann, und es wird einfach

$$5)\quad H_a = \frac{K}{2}\left(2 - \frac{v}{f}\right); \quad H_b = \frac{K}{2}\frac{v}{f};$$

$$6)\quad w = \frac{l}{2}\left(2 - \frac{v}{f}\right).$$

Will man die Kräfte zeichnerisch ermitteln, so lässt sich eine erheblich bessere Annäherung an die genauen Linien (nach Gl. 1 und 2)

Fig. 230.



erreichen. Man mache (Fig. 230) $AA_1 = K$, $DC_1 = \frac{1}{2}K$, DE aber $= 0{,}4\,K$, ziehe $A_1 E$, lege durch C_1 eine Lothrechte und runde den Knick durch einen bei C_1 beginnenden Kreisbogen aus. Ebenso mache man $DF = 0{,}4\,l$, ziehe BF und schließe an dieselbe einen Kreisbogen an, der bei C lothrecht gerichtet ist. Die so erhaltenen Linien schließen sich den Ergebnissen der Gl. 1 und 2 sowohl beim Halbkreisbogen wie auch bei flacheren Bogenträgern mit genügender Genauigkeit an.

VIII. Bogenfachwerk mit zwei Kämpfergelenken.

Die vorstehenden Betrachtungen über parabolische und kreisförmige Bogenträger gelten für Bögen überall gleichen Querschnitts bei beliebiger Querschnittsform. Geht man nun von I-förmigem Querschnitt aus und ersetzt die dünne Wand durch Streben, so erhält man einen Bogenträger, der mit dem voll-

wandigen Bogen in mindestens ebenso naher Beziehung steht, wie der einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen mit dem entsprechenden vollwandigen Träger. Die vorstehenden Entwickelungen sind daher leicht auf einen derartigen Fachwerkbogen mit parallelen Gurten zu übertragen. Bei **nicht** parallelen Gurten müssen aber andere Verfahren zur Berechnung angewandt werden, z. B. kann man den Rechnungsgang benutzen, welcher zur Ermittelung der Formänderung einfacher Fachwerke diente (s. S. 206).

Hat das Bogenfachwerk*) etwa die Form der Fig. 231, so denke man sich zunächst die festen Widerlager beseitigt und an dem unbelasteten Fachwerk in A und B je eine nach aufsen gerichtete Kraft Eins angebracht (Fig. 232). Für diesen statisch bestimmten Zustand kann man die Spannkräfte S' sämmtlicher Stäbe leicht ermitteln (z.B. mittels der Momentengleichung). Ein Stab von der Länge s und dem Querschnitte F erfährt dann eine Verlängerung $\Delta s = \frac{S' s}{EF}$, und die Vergröfserung, welche die Spannweite durch die beiden Kräfte 1 erfährt, beträgt nach Gl. 1, S. 207

Fig. 231.

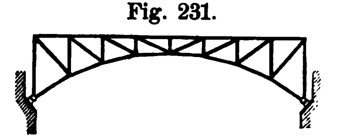
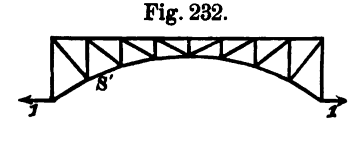


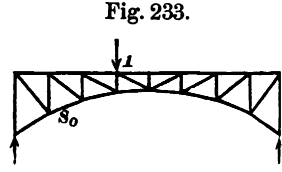
Fig. 232.



$$\Delta_1 l = \Sigma S' \Delta s = \sum \frac{S'^2 s}{EF}.$$

Nun stelle man sich das Fachwerk unter der gegebenen Belastung, z. B. einer Einzellast $= 1$, als **Balkenträger** aufgelagert vor (Fig. 233), so dass nur **lothrechte** Auflagerkräfte entstehen. Die hierdurch bedingten Spannkräfte sind dann wiederum statisch bestimmt und sollen, weil sie dem „Zustande $H = 0$“ (d. h. bei Fortlassung der statisch unbestimmten Kräfte H) entsprechen, mit S_0 bezeichnet

Fig. 233.



*) Mohr, Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger; Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1874, S. 223.

werden; sie bewirken die Stabverlängerungen $\Delta s = \frac{S_0 s}{EF}$. Im Sinne der Kräfte Eins in Fig. 232 entsteht dann eine Verlängerung

$$\Delta_2 l = \Sigma S' \Delta s = \sum \frac{S' S_0 s}{EF}.$$

Die wagerechten Kräfte H aber, welche durch den seitlichen Widerstand der Kämpfer auf den Bogenträger ausgeübt werden, bringen eine Sehnen-Verkürzung um

$$H \cdot \Delta_1 l = H \sum \frac{S'^2 s}{EF} \quad \text{hervor.}$$

Findet nun unter gleichzeitiger Einwirkung der Last, der lothrechten und wagerechten Auflagerkräfte A, B und H eine wirkliche Sehnenverlängerung Δl statt, so ist

$$1) \qquad \Delta l = \Delta_2 l - H \cdot \Delta_1 l = \sum \frac{S' S_0 s}{EF} - H \sum \frac{S'^2 s}{EF}.$$

Sind die Endpunkte A und B durch eine Spannstange vom Querschnitte F_1 verbunden, so wird $\Delta l = \frac{Hl}{EF_1}$ und (nach Einsetzung in Gl. 1)

$$2) \qquad H = \frac{\sum \frac{S' S_0 s}{EF}}{\sum \frac{S'^2 s}{EF} + \frac{l}{EF_1}}.$$

Hiernach kann man für jede Einzellast den Seitenschub berechnen und mittels einer H-Linie darstellen. Da einer wagerechten Zugkraft 1 eine Spannkraft S' entsprach, so bringt der Schub H eine Spannkraft $-HS'$ hervor; die wahre Spannkraft S eines Stabes im Bogenfachwerke beträgt daher

$$3) \qquad S = S_0 - HS'.$$

Sind die Endpunkte A und B nicht durch eine Spannstange verbunden, sondern zwischen festen Widerlagern angebracht ($F_1 = \infty$), so wird bei einer Temperaturänderung ein Temperaturschub H_t entstehen. Das frei gemachte Fachwerk würde nämlich durch eine Temperaturerhöhung um t^0 C. eine Sehnenverlängerung $l \varepsilon t$ (vgl. S. 240) erfahren, welche durch

die verkürzende Wirkung von H_t aufgehoben wird. Es muss hiernach

$$H_t \sum \frac{S'^2 s}{EF} = l \varepsilon t \quad \text{oder}$$

4) $$H_t = \frac{l \varepsilon t}{\sum \frac{S'^2 s}{EF}} \quad \text{sein.}$$

Würde die Temperatur-Steigerung auch eine Verschiebung der Widerlager um $\Delta_t l$ bewirken, so ergäbe sich

$$H_t \sum \frac{S'^2 s}{EF} = l \varepsilon t - \Delta_t l,$$

also statt Gl. 4:

5) $$H_t = \frac{l \varepsilon t - \Delta_t l}{\sum \frac{S'^2 s}{EF}}.$$

Zahlenrechnungen zeigen, dass die Längenänderung der Wandglieder (der Streben und Ständer) einen unbedeutenden Einfluss auf H und H_t hat, so dass man nur die Längenänderung der Gurten zu berücksichtigen braucht.

Zwölfter Abschnitt.

Sätze der Formänderungs-Arbeit.

I. Satz von der Abgeleiteten der Formänderungs-Arbeit.

Die Formänderungen, welche ein Stab, Balken oder Träger durch Einwirkung äufserer Kräfte erfährt, wurden in den vorstehenden Abschnitten nach verschiedenen Verfahren ermittelt und auch zur Berechnung statisch unbestimmbarer Anordnungen benutzt. Es lassen sich diese Verfahren aber in eine allgemeine Form kleiden mit Hülfe der sog. Formänderungs-Arbeit.

Ein beliebiger Balken- oder Bogenträger sei bezüglich der äufseren Kräfte statisch bestimmt und anfänglich völlig spannungslos. Die Auflagerung sei derartig angeordnet, dass die Stützpunkte entweder fest oder reibungslos verschiebbar. Zunächst werde der Träger als einfaches Fachwerk gedacht, welches unter Einwirkung der Lasten P_1, P_2, .. P, ... P_n im Gleichgewichte sei; dann ist die Spannkraft S irgend eines Stabes (von der Länge s und dem Querschnitte F) bekannt. Die Stäbe denken wir uns vorläufig als unelastisch, aber durch irgend welche besonderen Vorrichtungen (z. B. Schraubenschlösser) um beliebige Gröfsen Δs verlängert, dann werden hierdurch die Angriffspunkte der Lasten um v_1, v_2, ... v, ... v_n im Sinne der Lasten verschoben, und es muss nach dem Satze der virtuellen Verrückungen (s. S. 207) stattfinden:

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + \ldots + P v + \ldots P_n v_n = \Sigma S \Delta s .$$

Aendert sich nun eine der Lasten P um $d P$, so ändert sich die linke Seite der Gleichung um $dP \cdot v$. Auf der rechten Seite sind die zunächst ganz willkürlich gedachten Verlängerungen Δs der Stäbe von den Lasten P unabhängig, während die Spannkräfte S

natürlich von P beeinflusst werden. Die rechte Seite der Gleichung ändert sich daher um $\Sigma \partial S \cdot \Delta s$, und es wird

$$1) \qquad v = \sum \frac{\partial S}{\partial P} \Delta s.$$

Wählt man nun für die bisher beliebige Stabverlängerung Δs diejenige elastische Verlängerung, welche der Spannkraft S entspricht, setzt man also $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$, so wird

$$v = \sum \frac{S}{EF} \frac{\partial S}{\partial P} s.$$

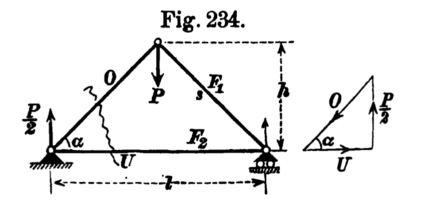
Die rechte Seite ist aber auch $= \frac{\partial \sum \frac{S^2 s}{2EF}}{\partial P}$, und zw. bedeutet $\sum \frac{S^2 s}{2EF}$ die Formänderungs-Arbeit des ganzen Fachwerks, welche beim Uebergange vom spannungslosen Anfangszustande bis zum Vorhandensein der Spannkräfte S verrichtet wurde. Denn bei diesem allmählichen Uebergange wird (nach der Mechanik) an einem Stabe die Arbeit $\frac{1}{2} S \cdot \Delta s = \frac{1}{2} S \cdot \frac{S}{EF} s = \frac{S^2 s}{2EF}$ verrichtet. Schreibt man für diese Formänderungsarbeit einfach L, so wird

$$2) \qquad v = \frac{\partial L}{\partial P},$$

und man hat den Satz:

Unter Annahme eines spannungslosen Anfangszustandes und gleich bleibender Temperatur des Trägers ist die Verrükkung v des Angriffspunktes einer Last P im Sinne dieser Last gleich der nach P gebildeten theilweisen Abgeleiteten der Formänderungs-Arbeit des Trägers.

Fig. 234.



Beispiel: Bei einem gleichschenkligen Gelenkdreieck, welches oben mit P belastet ist (Fig. 234), soll die elastische Senkung f des Angriffspunktes von P ermittelt werden.

Der Auflagerdruck $^1/_2 P$ muss mit den Spannkräften U und O im Gleichgewichte sein, daher wird

$$O = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{Ps}{2h}; \quad U = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{Pl}{4h}.$$

Die Formänderungs-Arbeit ist

$$L = \sum \frac{S^2 s}{2EF} = 2 \frac{O^2 s}{2EF_1} + \frac{U^2 l}{2EF_2} \quad \text{und}$$

$$f = \frac{\partial L}{\partial P} = 2 \frac{Os}{EF_1} \frac{\partial O}{\partial P} + \frac{Ul}{EF_2} \frac{\partial U}{\partial P};$$

weil aber

$$\frac{\partial O}{\partial P} = \frac{s}{2h}, \quad \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{l}{4h},$$

so wird

$$f = \frac{Ps^2}{hEF_1} \frac{s}{2h} + \frac{Pl^2}{4hEF_2} \frac{l}{4h} = \frac{P}{2Eh^2} \left(\frac{s^3}{F_1} + \frac{l^3}{8F_2} \right).$$

Sind die Stäbe auf gleiche Spannung σ bemessen, mithin

$$F_1 = \frac{O}{\sigma} = \frac{Ps}{2h\sigma} \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{U}{\sigma} = \frac{Pl}{4h\sigma},$$

so wird

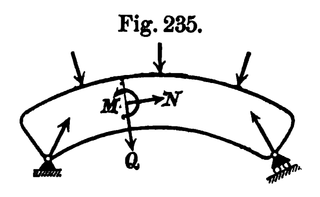
$$f = \frac{\sigma}{Eh} \left(s^2 + \frac{l^2}{4} \right).$$

Die Gl. 1 ist gleichbedeutend mit Gl. 1, S. 207: $v = \Sigma S' \Delta s$, in der S' die Spannkraft darstellt, welche einer Last $P = 1$ entspricht. Auf S. 253 ist nämlich die Spannkraft S von allen Lasten P beeinflusst, daher

$$S = S_1' P_1 + S_2' P_2 + \ldots + S' P + \ldots + S_n' P_n \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial P} = S'.$$

Ist der Träger nicht ein Fachwerk, sondern ein voller Körper und wieder bezüglich der äufseren Kräfte statisch bestimmt (Fig. 235), so kann man für irgend eine Schnittstelle das Moment M, die Längskraft N und die Querkraft Q berechnen. Wird nun aus dem Träger an der Schnittstelle so viel fortgenommen, dass eine offene Fuge entsteht, so kann man sich zwischen beiden Theilen Verschraubungen derartig angebracht denken, dass in der Richtung der Mittellinie eine Verlängerung Δds, eine Verdrehung der beiden Theile gegen einander um $\Delta d\varphi$ und eine Verschiebung im entgegengesetzten Sinne von Q um dq ausführbar wird. Diese einstweilen beliebigen Formänderungen haben dann Verrückungen der Angriffspunkte der Lasten P zur Folge. Geschehen solche Formänderungen aber an sehr vielen

Fig. 235.



Querschnitten, so muss nach dem Satze der virtuellen Verrückungen

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + \ldots + P v + \ldots + P_n v_n = \int N \Delta ds + \int M \Delta d\varphi + \int Q dq$$

sein, und, wenn man die Abgeleitete nach P bildet,

$$v = \int \frac{\partial N}{\partial P} \Delta ds + \int \frac{\partial M}{\partial P} \Delta d\varphi + \int \frac{\partial Q}{\partial P} dq.$$

Lässt man nun wieder die beliebigen Formänderungen zu elastischen werden und vernachlässigt, wie in allen früheren Fällen geschehen, die Formänderung in Folge der Querkräfte, so wird nach S. 225

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EF}, \quad \Delta d\varphi = \frac{M ds}{EJ}, \quad dq = 0,$$

mithin

$$v = \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P} ds,$$

was man auch schreiben kann:

$$3) \qquad v = \frac{\partial \left\{ \int \frac{N^2 ds}{2EF} + \int \frac{M^2 ds}{2EJ} \right\}}{\partial P}.$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist aber wiederum die Formänderungs-Arbeit des Trägers. Schneidet man nämlich aus dem krummen Stab ein Längentheilchen ds heraus, so tritt (Fig. 236) in einem Abstande z von der Mittellinie eine Spannung

Fig. 236.

$$4) \qquad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mz}{J}$$

auf. In einem, der Querschnittsfläche dF zugehörigen, Theilchen entsteht dann (vom spannungslosen Zustande aus gerechnet) eine Formänderungs-Arbeit $\frac{\sigma^2}{E} \frac{dF \cdot ds}{2}$, in dem ganzen Stabtheilchen vom Querschnitte F daher die Arbeit

$$dL = \frac{ds}{2E} \int \sigma^2 dF = \frac{ds}{2E} \int \left(\frac{N}{F} + \frac{Mz}{J} \right)^2 dF.$$

(Die Integration ist eine solche nach z, über den ganzen Querschnitt auszudehnen.) Daher wird

$$dL = \frac{ds}{2E} \left\{ \frac{N^2}{F^2} \int dF + 2 \frac{N}{F} \frac{M}{J} \int z\, dF + \frac{M^2}{J^2} \int dF z^2 \right\}$$

oder, weil $\int z\,d\,F = 0\,,\quad \int d\,F z^2 = J\,,$

$$d\,L = \frac{N^2 d\,s}{2\,E\,F} + \frac{M^2 d\,s}{2\,E\,J}\,.$$

Mithin ist die **Formänderungs-Arbeit des ganzen Körpers**

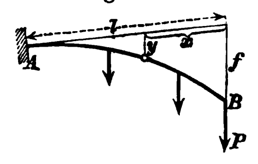
$$5)\qquad \boldsymbol{L = \int \frac{N^2\,d\,s}{2\,E\,F} + \int \frac{M^2\,d\,s}{2\,E\,J}}\,,$$

worin die Integrationen sich auf die ganze Länge des Stabes erstrecken. Hiernach bedeutet Gl. 3 wiederum

$$v = \frac{\partial\,L}{\partial\,P}\,;$$

Gl. 2 auf S. 254 und der darangeschlossene Satz gelten daher auch für volle Träger und selbstverständlich auch für Vereinigungen von Fachwerk und Vollträger. Sie gelten aber nicht mehr, wenn Stäbe mit excentrischem Zug oder Druck vorkommen, weil bei diesen nach S. 140 und 141 die Spannungen nicht mehr einfach proportional mit der Kraft sind. Sie setzen auch voraus, dass der Träger bei Fortnahme aller Lasten spannungslos wird. Auch würden sie nicht mehr gültig bleiben, wenn die Biegungsspannungen sich über einen Querschnitt nicht proportional mit dem Abstande von der Nulllinie vertheilen.

Fig. 237.



Beispiel: Ist ein gerader Stab in einfacher Weise einer geraden Belastung ausgesetzt (Fig. 237) und will man die Durchbiegung f des Punktes B gegen die Tangente an A berechnen, so wird in Gl. 4 annähernd $N = 0$ und $d\,s = d\,x$, mithin

$$L = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M^2\,d\,x}{2\,E\,J} \quad \text{und} \quad f = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M}{E\,J}\,\frac{\partial\,M}{\partial\,P}\,d\,x\,.$$

Nun kann man $M = M_0 + P\,x$ schreiben, wenn M_0 der von P unabhängige Theil des Biegungsmomentes ist; dann erkennt man, dass $\partial\,M : \partial\,P = x$, mithin

$$f = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M\,x\,d\,x}{E\,J}\,,$$

wie früher auf S. 36 gefunden.

II. Satz der kleinsten Formänderungs-Arbeit.

Hat ein Träger Stützpunkte, welche im Sinne der dort auftretenden Stützenwiderstände unbeweglich sind, so kann man letztere, wenn sie statisch unbestimmbar, als Lasten auffassen, für deren Größe die Bedingung $v = 0$ maßgebend ist. Unterscheidet man diese statisch unbestimmten Kräfte von den eigentlichen Lasten P, indem man sie mit X bezeichnet, so gilt nun für eine solche Kraft nach Gl. 2, S. 254 die Bedingungs-Gleichung

$$1) \qquad \frac{\partial L}{\partial X} = 0,$$

oder die Abgeleitete der Formänderungs-Arbeit nach einem statisch unbestimmbaren Stützenwiderstande ist Null. Man kann dafür auch sagen, es muss die Kraft X einen solchen Werth haben, dass die Formänderungs-Arbeit, als von X abhängig aufgefasst, ein Maximum oder ein Minimum werde. Von diesen beiden Möglichkeiten bleibt aber nur die letztere bestehen; denn statisch möglich würde auch ein Werth X von so bedeutender Größe sein, dass dagegen die übrigen Kräfte nahezu verschwänden und dass daraus Spannungen entständen, welche einer außerordentlich großen Formänderungs-Arbeit entsprechen. Rein statisch betrachtet, ohne Rücksicht auf die Festigkeits-Eigenschaften des Stoffes, giebt es für L kein endliches Maximum: mit fortwährend wachsendem X nimmt auch L fortwährend zu; $\partial L : \partial X = 0$ kann daher nur die Bedingung für ein Minimum sein. Uebrigens ist auch leicht einzusehen, dass aus $\frac{\partial L}{\partial X} = v$ eine zweite Abgeleitete $\frac{\partial^2 L}{\partial X^2} = \frac{\partial v}{\partial X}$ folgt, die nur einen positiven Werth haben kann.

Für einen vollwandigen Träger z. B. ist $N = N_0 + N'X$ und $M = M_0 + M'X$. Dann bedeutet N' denjenigen Werth der Längskraft, welcher durch eine Kraft X von der Größe Eins hervorgebracht wird, während N_0 den Einfluss der übrigen äußeren Kräfte auf N darstellt; die Bedeutung der Größen M' und M_0 ist die entsprechende. Hiernach ist

$$\frac{\partial N}{\partial X} = N' \quad \text{und} \quad \frac{\partial M}{\partial X} = M'.$$

Aus Gl. 5 (S. 257) entsteht nun

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\int\frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial X}ds+\int\frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial X}ds=\int\frac{N}{EF}N'ds+\int\frac{M}{EJ}M'ds$$

und

$$\frac{\partial^2 L}{\partial X^2}=\int\frac{\partial N}{\partial X}\frac{N'}{EF}ds+\int\frac{\partial M}{\partial X}\frac{M'}{EJ}ds=\int\frac{N'^2}{EF}ds+\int\frac{M'^2}{EJ}ds.$$

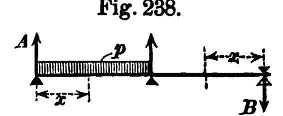
Die Quadrate N'^2 und M'^2 sind aber stets positiv, daher $\frac{\partial^2 L}{\partial X^2}$ stets >0. Für Fachwerk ist der Beweis entsprechend.

Unter denselben Beschränkungen, die bei dem Satze von der Abgeleiteten der Formänderungs-Arbeit (S. 254) angeführt wurden, und unter der Annahme, dass die Stützpunkte im Sinne der Auflagerwiderstände unbeweglich sind, gilt daher der Satz der kleinsten Formänderungs-Arbeit: Ein statisch unbestimmbarer Stützenwiderstand hat nach der Elasticitätslehre denjenigen Werth, der einem Minimum der Formänderungs-Arbeit entspricht.

Die Formänderungs-Arbeit ist unabhängig von den Vorzeichen, mit welchen Längskraft und Moment eingeführt werden, weil nur die Quadrate von N und M in L vorkommen.

Beispiel: Ein Balken überall gleichen Querschnitts sei zwanglos an 3 Stellen in gleichen Abständen l unterstützt (Fig. 238); das eine Feld sei mit p belastet, das andere unbelastet. Dann kann der eine Auflagerdruck A nach dem Obigen leicht bestimmt werden. Der Auflagerdruck am anderen Ende ist $B = \frac{1}{2}pl - A$. Im linksseitigen Felde gilt

Fig. 238.



$$M = Ax - \frac{1}{2}px^2 \text{ mit } \frac{\partial M}{\partial A} = x,$$

im rechtsseitigen aber

$$M = Bx = \frac{1}{2}plx - Ax \text{ mit } \frac{\partial M}{\partial A} = -x.$$

Da nun $N=0$ und daher nach S. 257

$$L=\int\frac{M^2 dx}{2EJ} \quad \text{also} \quad \frac{\partial L}{\partial A}=\int\frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial A}dx=0$$

sein soll, so ergiebt sich, wenn man das überall gleiche EJ fortlässt:

$$\int_0^l\left(Ax^2dx-p\frac{x^3}{2}dx\right)-\int_0^l\left(\frac{plx^2}{2}dx-Ax^2dx\right)=0, \text{ oder}$$

$$\frac{Al^3}{3}-\frac{pl^4}{8}-\frac{pl^4}{6}+\frac{Al^3}{3}=0, \text{ oder}$$

$$A = \frac{7}{16}pl$$

(wie auf S. 48 gefunden).

Beispiel: Der Seitenschub H des auf S. 250 behandelten Bogenfachwerks mit Spannstange möge nun auch nach dem Satze der kleinsten Formänderungs-Arbeit berechnet werden. Es wird

$$L = \sum \frac{S^2 s}{2EF} + \frac{H^2 l}{2EF_1},$$

worin das letzte Glied sich auf die Spannstange bezieht. Daher muss

$$\frac{\partial L}{\partial H} = \sum \frac{S}{EF} \frac{\partial S}{\partial H} s + \frac{Hl}{EF_1} = 0$$

werden. Nennt man nun wieder S_0 diejenige Stabkraft, welche dem Zustande $H=0$ entspricht (d. h. nur durch die lothrechten Kräfte bedingt ist), S' diejenige, welche durch nach aufsen gerichtete Seitenzüge von der Gröfse Eins hervorgebracht werden würde, so ist die ganze Spannkraft

$$S = S_0 - HS' \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial H} = -S',$$

daher

$$-\sum \frac{S_0 S'}{EF} s + H \sum \frac{S'^2 s}{EF} + \frac{Hl}{EF_1} = 0$$

oder

$$H = \frac{\sum \frac{S_0 S' s}{EF}}{\sum \frac{S'^2 s}{EF} + \frac{l}{EF_1}},$$

wie auf S. 251 gefunden.

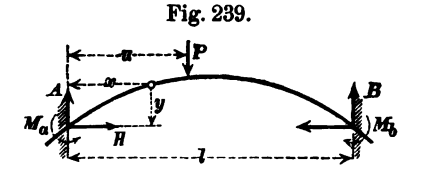
Dreizehnter Abschnitt.

Bogenträger ohne Gelenke.

I. Allgemeine Gleichungen für den Bogenträger ohne Gelenke.

Der Bogenträger sei ein stabförmiger Körper, dessen Mittellinie nach der Kurve AB (Fig. 239) gestaltet ist und dessen Enden fest eingespannt sind, so dass dort aufser lothrechten und wagerechten Widerständen auch noch Einspannungs-Momente auftreten.

Fig. 239.



Dieser Bogenträger ist, da ihm, dem statisch bestimmten Bogen gegenüber, 3 Gelenke fehlen, dreifach statisch unbestimmt, so dass 3 Elasticitäts-Gleichungen für ihn entwickelt werden müssen. Die Auflagerkräfte am linksseitigen Ende, M_a, A und H, mögen als die statisch unbestimmbaren Gröfsen eingeführt werden, auf welche sich dann M_b und B zurückführen lassen. Die Formänderungs-Arbeit L muss nun, als von M_a, A und H abhängig dargestellt, ein Minimum sein, oder es muss

$$\frac{\partial L}{\partial M_a} = \frac{\partial L}{\partial A} = \frac{\partial L}{\partial H} = 0 \quad \text{werden}.$$

Weil aber nach S. 257 $L = \int \frac{N^2 ds}{2EF} + \int \frac{M^2 ds}{2EJ}$,

so muss stattfinden

$$\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial M_a} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_a} ds = 0,$$

$$\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial A} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial A} ds = 0,$$

$$\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial H} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0.$$

Bezeichnet man mit M_o und N_o diejenigen Werthe von M und N, welche für $M_a = A = H = 0$ entstehen würden, so ist

$$M = M_o + A x - H y - M_a$$

$$N = N_o - A \frac{dy}{ds} - H \frac{dx}{ds}.$$

Hiernach wird

$$\frac{\partial N}{\partial M_a} = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial A} = -\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{\partial N}{\partial H} = -\frac{dx}{ds};$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_a} = -1, \qquad \frac{\partial M}{\partial A} = x, \qquad \frac{\partial M}{\partial H} = -y;$$

dies giebt, in obige 3 Gleichungen eingesetzt,

1) $$\int_{x=0}^{x=l} \frac{M}{EJ} ds = 0,$$

2) $$-\int_{x=0}^{x=l} \frac{N}{EF} dy + \int_{x=0}^{x=l} \frac{Mx}{EJ} ds = 0,$$

3) $$\int_{x=0}^{x=l} \frac{N}{EF} dx + \int_{x=0}^{x=l} \frac{My}{EJ} ds = 0$$

als die 3 Bedingungsgleichungen für den Bogen ohne Gelenke.

Diese Gleichungen hätte man auch aus den Biegungsgleichungen 4—6 für den krummen Stab (S. 227) leicht finden können. Wegen der festgehaltenen und eingespannten Enden müssen nämlich die linken Seiten jener Gleichungen Null werden, wenn man rechts von $x = 0$ bis $x = l$ integrirt. Dann wird aus Gl. 4: $\int \frac{M}{EJ} ds = 0$, und wenn man dies bei den

folgenden beiden Gleichungen berücksichtigt, so entstehen leicht die vorstehenden Gl. 1—3.

Vernachlässigt man die aus der Längskraft entstehende Formänderung, so erhält man einfach

$$7)\qquad \int_{x=0}^{x=l} \frac{M}{EJ}\, ds = \int_{x=0}^{x=l} \frac{Mx}{EJ}\, ds = \int_{x=0}^{x=l} \frac{My}{EJ}\, ds = 0.$$

II. Flacher Parabelbogen überall gleichen Querschnitts ohne Gelenke.

Für den flachen Bogen überall gleichen Querschnitts können EF und EJ vor die Integralzeichen gesetzt, $ds = dx$ und $N = -H$ eingeführt werden; dann nehmen die 3 Bedingungsgleichungen (S. 262) die einfachere Gestalt an:

$$1)\qquad \int_0^l M\, dx = 0$$

$$2)\qquad \int_0^l M x\, dx = 0$$

$$3)\qquad -H \frac{J}{F} l + \int_0^l M y\, dx = 0\,.$$

(In Gl. 2, S. 262, wird nämlich das erste Glied $\frac{H}{EF} \int_{x=0}^{x=l} dy$; die ganze senkrechte Projektion $\int dy$ des Bogens ist aber $= 0$.)

Es soll nun zunächst wieder, die Wirkung einer **Einzellast** im Abstande u vom linksseitigen Kämpfer untersucht werden. Dann ist für eine Schnittstelle links bezw. rechts von der Last:

$$M_l = Ax - Hy - M_a$$
$$M_r = Ax - Hy - M_a - P(x-u)\,,$$

außerdem $y = \frac{4f}{l^2} x (l - x)$; und es entsteht aus Gl. 1:

$$A \int_0^l x\, dx - H \int_0^l y\, dx - M_a \int_0^l dx - P \int_u^l (x-u)\, dx = 0,$$

oder, weil $\int y\, dx$ die Parabelfläche darstellt, also $= {}^2/_3\, fl$ ist,

$$4)\qquad {}^1/_2\, A l^2 - {}^2/_3\, H f l - M_a l - {}^1/_2\, P (l-u)^2 = 0.$$

Gl. 2 giebt:

$$A\int_0^l x^2\,dx - H\int_0^l x\,y\,dx - M_a\int_0^l x\,dx - P\int_u^l x^2\,dx + P\,u\int_u^l x\,dx = 0$$

oder, weil $\int x\,y\,dx$, das statische Moment der Parabelfläche, $= {}^2/_3\,f\,l\cdot{}^1/_2\,l = {}^1/_3\,f\,l^2$,

5) $\quad {}^1/_3\,A\,l^3 - {}^1/_3\,H\,f\,l^2 - {}^1/_2\,M_a\,l^2 - {}^1/_6\,P\,(l-u)^2\,(2\,l+u) = 0.$

Gl. 3 liefert:

$$-H\frac{J}{F}l + A\int_0^l x\,y\,dy - H\int_0^l y^2\,dx - M_a\int_0^l y\,dx - P\int_u^l x\,y\,dx + P\,u\int_u^l y\,dx = 0.$$

Weil aber

$$\int_0^l x\,y\,dx = {}^1/_3 f\,l^2,$$

$$\int_0^l y^2\,dx = {}^8/_{15}\,l\,f^2$$

als statisches Moment der Parabelfläche in Bezug auf die Sehne (s. S. 230),

$$\int_u^l x\,y\,dx = \frac{4\,f}{l^2}\int_u^l (l\,x^2 - x^3)\,dx = \frac{4\,f}{l^2}\left(\frac{l^4}{12} - \frac{l\,u^3}{3} + \frac{u^4}{4}\right),$$

$$\int_u^l y\,dx = \frac{4\,f}{l^2}\int_u^l (l\,x - x^2)\,dx = \frac{4\,f}{l^2}\left(\frac{l^3}{6} - \frac{l\,u^2}{2} + \frac{u^3}{3}\right),$$

so wird

6) $\quad -H\frac{J}{F}l + \frac{1}{3}A\,f\,l^2 - \frac{8}{15}H\,f^2\,l - \frac{2}{3}M_a\,f\,l - \frac{P\,f}{3\,l^2}(l-u)^3(l+u) = 0.$

Die Gl. 4—6 geben dann, nach A, H und M_a aufgelöst:

7) $$A = P\,\frac{(l-u)^2\,(l+2\,u)}{l^3}$$

8) $$H = \frac{15}{4}P\,\frac{(l-u)^2\,u^2}{l^3 f\left(1 + \frac{45}{4}\frac{J}{F f^2}\right)}$$

9) $$M_a = P\,\frac{u\,(l-u)^2}{l^3}\left(l - \frac{{}^5/_2\,u}{1 + \frac{45}{4}\frac{J}{F f^2}}\right).$$

Setzt man wiederum das Glied, welches die Verkürzung der Mittellinie in Folge der Druckwirkung von H berücksichtigt,

$$10)\qquad \frac{45}{4}\frac{J}{Ff^2}=\zeta,$$

so wird kürzer

$$11)\qquad H=\frac{15}{4}P\frac{(l-u)^2\,u^2}{l^3 f(1+\zeta)},$$

$$12)\qquad M_a=P\frac{u\,(l-u)^2}{l^3}\left(l-\frac{{}^5\!/_2\,u}{1+\zeta}\right).$$

Ist z. B. wieder, wie beim Bogen mit 2 Gelenken (S. 232), $\frac{J}{Ff^2}=\frac{1}{100}$, so wird

$$1+\zeta=1+\frac{45}{400}=1+0{,}11\,;$$

es ist hier also ζ bedeutender als beim Bogen mit 2 Gelenken.

Die Werthe von B und M_b ergeben sich am einfachsten, wenn man in denen für A und M_a die Gröſse u mit $l-u$ vertauscht.

Die lothrechten Auflagerwiderstände A und B sind dieselben, wie bei einem beiderseits wagerecht eingespannten Balken.

III. Kämpferdrucklinie und Kämpferdruck-Umhüllungslinie für den flachen Parabelbogen ohne Gelenke.

Der in dem Endpunkte A der Mittellinie des Bogens angreifende Seitenschub H lässt sich mit dem Einspannungsmomente M_a zusammensetzen zu einem Seitenschube von derselben Gröſse H, welcher aber um die Strecke t_a nach unten parallel verschoben ist (Fig. 240), wenn man

Fig. 240.

$$1)\quad t_a=\frac{M_a}{H}=\frac{4}{15}f\frac{l}{u}\left(1+\zeta-\frac{5}{2}\frac{u}{l}\right)$$

macht. Vereinigt man dieses H dann noch mit A, so hat man den linksseitigen Kämpferdruck W nach Gröſse, Richtung und Lage. Derjenige Punkt S, in welchem W die Richtungslinie der Last P schneidet, ist ein Punkt der

Kämpferdrucklinie; durch ihn muss auch der rechtsseitige Kämpferdruck W_1 hindurchgehen. Der Punkt S hat die Abscisse u, seine Ordinate in Bezug auf die Sehne des Bogens sei wiederum z, dann gilt die Beziehung

$$2)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{z + t_a}{u} = \frac{A}{H} = \frac{4}{15}\frac{fl}{u^2}\left(1 + 2\frac{u}{l}\right)(1 + \zeta),$$

woraus sich, mit Berücksichtigung von Gl. 1, ergiebt:

$$3)\qquad z = \frac{6}{5} f\left(1 + \frac{4}{9}\zeta\right).$$

Da z von u unabhängig, so ist die **Kämpferdrucklinie** eine wagerechte Gerade DE; ihre Höhe über der Bogensehne beträgt

für $\zeta = 0$: $\quad z = {}^6/_5\, f = 1{,}2\, f$,

für $\zeta = 0{,}11$: $\quad z = {}^6/_5\, f \cdot 1{,}05 = 1{,}26\, f$.

Es empfiehlt sich, die Lage des Angriffspunktes A_1 des Kämpferdrucks gegen die Kämpferdrucklinie DE festzulegen durch den Abstand

$$v_a = A_1 D = z + t_a = \frac{4}{15} f \frac{l}{u}\left(1 + 2\frac{u}{l}\right)(1 + \zeta)$$

(nach Gl. 2), was man auch schreiben kann

$$4)\qquad v_a = \frac{8}{15} f\left(1 + \frac{l}{2u}\right)(1 + \zeta).$$

Den entsprechenden Abstand v_b für die rechte Seite erhält man einfach durch Vertauschung von u mit $l - u$.

Links von der Last P ist W, rechts von derselben W_1 die einzige äußere Kraft. Der Linienzug $A_1 S B_1$ heißt für diesen Belastungszustand die Drucklinie des Bogens. Nennt man die lothrechten Ordinatenstücke zwischen der Drucklinie und der Mittellinie des Bogens η, so geben diese, mit dem Seitenschube H multiplicirt, ohne Weiteres die Biegungsmomente in Bezug auf die Mittellinie des Bogens. Für einen Punkt M derselben z. B. kann man W_1 am oberen Endpunkte von η zerlegen in B und H, dann hat B kein Moment, H aber das Moment in Bezug auf den Punkt M

$$5)\qquad M = H\eta.$$

Die Schnittpunkte der Drucklinie mit der Bogenlinie sind Momenten-Nullpunkte; wo die Drucklinie oberhalb der Mittel-

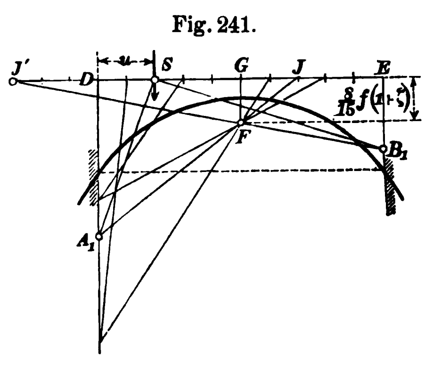
linie des Bogens liegt, sind die Momente positiv (d. h. wie bei einem einfachen Balken auf 2 Stützen) und umgekehrt.

Während beim Bogen mit 2 Gelenken die einer Einzellast entsprechenden Kämpferdrücke schon durch die Kämpferdrucklinie völlig bestimmt waren, weil sie durch die Gelenkpunkte A und B gehen mussten, sind beim Bogen ohne Gelenke noch die Punkte A_1 und B_1 zu ermitteln, was übrigens leicht ausführbar, da man den Werth v_a in Gl. 4 bequem durch Zeichnung finden kann.*) Von der Mitte G der Kämpferdrucklinie aus (Fig. 241) trägt man

$$GF = {}^8/_{15}\, f(1+\zeta)$$

nach unten auf und benutzt F für die Zeichnung der Kämpferdrücke als Festpunkt. Liegt eine Last bei S, so überträgt man $DS = u$ nach GJ und zieht JF bis zum Schnitt A_1 mit der Auflager-Senkrechten; dann ist

Fig. 241.



$$DA_1 : DJ = GF : GJ \quad \text{oder}$$

$$DA_1 = \frac{8}{15} f(1+\zeta)\, \frac{\left(\frac{l}{2}+u\right)}{u} = v_a.$$

$A_1 S$ ist nun die Richtungslinie von W. Macht man dann $GJ' = l - u$, zieht $J'FB_1$, so ist ebenso $B_1 S$ die Richtung von W_1.

Zeichnet man so für viele Werthe von u die zugehörigen Kämpferdrücke W, so erhält man eine Schar von Geraden, die eine Kurve umhüllen. Die Gleichung dieser **Kämpferdruck-Umhüllungslinie** wollen wir entwickeln. In Bezug auf den Anfangspunkt D hat eine solche Gerade $A_1 S$ (Fig. 242) die Gleichung

Fig. 242.

$$6) \qquad y = \frac{v_a}{u}(u - x) = \frac{8}{15} f(1+\zeta)\left(1 + \frac{l}{2u}\right)\left(1 - \frac{x}{u}\right).$$

---

*) S. Friedr. Steiner, Theorie der Bogenbrücken; Allgemeine Bauzeitung 1874, S. 21.

Nach der Lehre der Umhüllungslinien hat man die Abgeleitete dieser Gleichung nach dem sog. Parameter u der Linienschar, also $dy : du$, gleich Null zu setzen, daraus u zu berechnen und in Gl. 6 einzuführen, um die Gleichung der Umhüllungslinie zu erhalten. Es wird (unter Fortlassung unveränderlicher Faktoren)

$$\frac{dy}{du} = 0 = \left(1 + \frac{l}{2u}\right)\frac{x}{u^2} - \left(1 - \frac{x}{u}\right)\frac{l}{2u^2};$$

daraus ergiebt sich

$$u = \frac{lx}{{}^1\!/_2\, l - x}, \quad \text{also} \quad 1 + \frac{l}{2u} = \frac{x + {}^1\!/_2\, l}{2x} \quad \text{und}$$

$$1 - \frac{x}{u} = \frac{{}^1\!/_2\, l + x}{l}.$$

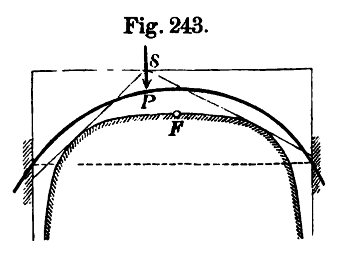
Dies giebt, in Gl. 6 eingesetzt, nach einfacher Zusammenziehung

$$7) \qquad y = \frac{4}{15} f(1+\zeta) \frac{({}^1\!/_2\, l + x)^2}{lx}.$$

Man erkennt leicht, dass die hierdurch dargestellte Umhüllungslinie eine Hyperbel ist. Eine dazu symmetrische Kurve gilt für das rechtsseitige Widerlager. (Beide treffen in dem Punkte F der Fig. 241 mit gemeinsamer wagerechter Richtung zusammen.)

Die Kämpferdrucklinie und die beiden Umhüllungslinien (Fig. 243) bestimmen nun die Widerlagerkräfte, welche von einer Einzellast hervorgerufen werden, vollständig: Von dem Punkte S aus, in welchem die Last die erstere Linie schneidet, zieht man Berührungsgeraden an beide Umhüllungskurven und hat damit die Richtungslinien von W und W_1. Durch Zerlegung von P nach beiden erhält man dann auch die Gröfsen von W und W_1. Bei Bogenträgern von anderer Form sind Kämpferdrucklinie und Umhüllungslinien abweichend von den oben gefundenen, aber stets werden sie in gleicher Weise zur Lösung der Aufgabe führen.

Fig. 243.



Beim flachen Parabelbogen freilich wird man die hyperbolischen Umhüllungslinien kaum verwenden, sondern vorziehen, nach Fig. 241 die Kämpferdrücke unmittelbar zu zeichnen.

Gleichmäfsige Belastung einer Strecke. Vertauscht man, wie beim Bogen mit 2 Gelenken, S. 234, in den Gl. 7, 11 und 12 (S. 264 u. 265) P mit $p\,du$ und integrirt von $u=0$ bis $u=u$, so wird

8) $$A = p\,u\left(1 - \frac{u^2}{l^2} + \frac{1}{2}\frac{u^3}{l^3}\right),$$

9) $$H = \frac{p\,l^2}{8f(1+\zeta)}\frac{u^3}{l^3}\left(10 - 15\frac{u}{l} + 6\frac{u^2}{l^2}\right),$$

10) $$M_a = p\,u^2\left\{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{u}{l} + \frac{1}{4}\frac{u^2}{l^2} - \frac{5}{2(1+\zeta)}\frac{u}{l}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{u}{l} + \frac{1}{5}\frac{u^2}{l^2}\right)\right\}.$$

Ist die linksseitige Hälfte mit p belastet, also $u = \frac{1}{2}\,l$, so wird

11) $$A = \frac{13}{32}p\,l, \qquad B = \frac{3}{32}p\,l,$$

12) $$H = \frac{p\,l^2}{16f(1+\zeta)},$$

13) $$M_a = \frac{p\,l^2}{64}\frac{1 + \frac{11}{3}\zeta}{1+\zeta}, \qquad M_b = -\frac{p\,l^2}{64}\frac{1 - \frac{5}{3}\zeta}{1+\zeta}.$$

Ersetzt man aber diese Momente durch eine Parallelverschiebung von H, so wird (Fig. 244)

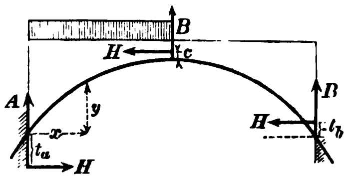
14) $$t_a = \frac{f}{4}\left(1 + \frac{11}{3}\zeta\right), \qquad t_b = -\frac{f}{4}\left(1 - \frac{5}{3}\zeta\right).$$

Im Scheitel wird das Moment

15) $$M_o = B\frac{l}{2} - H(f + t_b) = \frac{p\,l^2}{48}\frac{\zeta}{1+\zeta}:$$

Da an der rechtsseitigen Hälfte keine Lasten vorkommen, so ist die für den Schnitt im Scheitel gültige resultirende Kraft gleichbedeutend mit dem rechtsseitigen Kämpferdrucke; zerlegt man sie auch im Scheitel in H und B, so liegt der Angriffspunkt von H um

Fig. 244.



16) $$c = \frac{M_o}{H} = f\frac{\zeta}{3}$$

oberhalb der Mittellinie des Bogens.

Für $\zeta = 0$ ist

$$H = \frac{p l^2}{16 f}, \quad M_a = \frac{p l^2}{64}, \quad M_b = -\frac{p l^2}{64},$$

$$t_a = {}^1\!/_4 f, \quad t_b = -\frac{1}{4} f,$$

$$M_0 = 0 \quad \text{und} \quad c = 0;$$

der Spannungsmittelpunkt des Scheitelschnittes liegt also in dessen Schwerpunkte.

Unter derselben Voraussetzung $\zeta = 0$ wird das Biegungsmoment für irgend eine Stelle (x, y) der belasteten Hälfte

$$M_x = A x - H (t_a + y) - {}^1\!/_2 p x^2;$$

nach Einführung der Werthe für

$$A, H, t_a \text{ und } y = \frac{4 f}{l^2} (l x - x^2)$$

entsteht daraus

$$M_x = {}^1\!/_{64} p (10 l x - l^2 - 16 x^2).$$

Dies giebt für $x = {}^5\!/_{16} l$ den Gröfstwerth

$$M_{max} = {}^9\!/_{16} \cdot {}^1\!/_{64} p l^2. \tag{17}$$

Auf der unbelasteten Hälfte ergiebt sich ein analytisches Minimum von demselben Werthe, nur mit negativem Zeichen.

Vergleicht man mit diesen Biegungsmomenten die Einspannungsmomente M_a und M_b, so findet man, dass deren absolute Werthe ${}^{16}\!/_9$ mal so grofs sind. Letztere sind daher bei der angenommenen Belastungsart die gröfsten der am Bogen vorkommenden Momente. Dies Ergebnis bleibt auch noch richtig, wenn ζ, der Wirklichkeit entsprechend, gröfser als Null eingeführt wird.

Die Belastung der ganzen Spannweite mit p (d. h. $u = l$) (Fig. 245) giebt aus den Gl. 8—10:

$$A = B = {}^1\!/_2 p l,$$

$$H = \frac{p l^2}{8 f (1 + \zeta)}, \tag{18}$$

$$M_a = \frac{p l^2}{12} \frac{\zeta}{1 + \zeta}, \quad t_a = \frac{M_a}{H} = \frac{2}{3} f \zeta. \tag{19}$$

Fig. 245.

Zu dem Scheitelmomente M_0 trägt (der Symmetrie wegen) die Belastung der einen Hälfte ebenso viel bei wie die der anderen, weshalb M_0 hier doppelt so grofs werden muss wie in Gl. 15.

Da ferner H ebenfalls auf das Doppelte angewachsen ist, so wird c ebenso wie in Gl. 16; also

20) $$M_0 = \frac{p\,l^2}{24}\,\frac{\zeta}{1+\zeta}, \quad c = \frac{1}{3} f \zeta = \frac{1}{2} t_a.$$

Erführe die Mittellinie des Bogens nicht eine Verkürzung durch die Längskraft, so würden (weil dann $\zeta = 0$) c und t_a gleich Null werden, d. h. der Seitenschub H würde im Scheitel sowie an den Kämpfern in der Mittellinie angreifen. In Folge der Bogenverkürzung aber rückt der Angriffspunkt des Seitenschubes im Scheitel um c nach oben, an den Kämpfern um doppelt so viel nach unten, woraus sich M_a als gröfstes Moment ergiebt.

Ist der ganze Bogen mit der ständigen Last g, die linke Hälfte mit der beweglichen Last p bedeckt, so ergiebt sich durch sinngemäfse Verbindung vorstehender Formeln:

21) $$H = \frac{l^2}{16 f (1+\zeta)} (2\,g + p),$$

$$M_a = \frac{g\,l^2}{12}\,\frac{\zeta}{1+\zeta} + \frac{p\,l^2}{64}\,\frac{1 + {}^{11}\!/_3\,\zeta}{1+\zeta},$$

was man auch schreiben kann

22) $$M_a = {}^1\!/_{64}\, p\, l^2 + {}^2\!/_3\, H f \zeta;$$

23) $$M_b = \frac{g\,l^2}{12}\,\frac{\zeta}{1+\zeta} - \frac{p\,l^2}{64}\,\frac{1 - {}^5\!/_3\,\zeta}{1+\zeta} = - {}^1\!/_{64}\, p\, l^2 + {}^2\!/_3\, H f \zeta.$$

24) $$M_o = H c = {}^1\!/_3\, H f \zeta.$$

Die weitere Berechnung des Bogenträgers ohne Gelenke lässt sich mit Hülfe der Kämpferdrucklinie und der Umhüllungslinien in derselben Weise durchführen, wie für den flachen Bogen mit Kämpfergelenken gezeigt wurde.

Ausweichen der Widerlager. Um den Einfluss eines Ausweichens der Kämpfer (einer Verlängerung der Bogensehne) um Δl zu ermitteln, setze man in Gl. 3, S. 262, Δl statt 0; dann ergiebt sich als Folge der Ausweichung, dass H um $\frac{45}{4}\,\frac{E J \Delta l}{l f^2 (1+\zeta)}$ abnimmt, M_a um $\frac{15}{2}\,\frac{E J \Delta l}{l f (1+\zeta)}$ zunimmt, M_0 um $\frac{15}{4}\,\frac{E J \Delta l}{l f (1+\zeta)}$ zunimmt. — Vertauscht man Δl mit $-l \varepsilon t$, so erhält man den Einfluss einer **Temperatur-Erhöhung** um t Grad.

Vierzehnter Abschnitt.

Erddruck und Stützmauern.

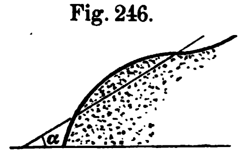
I. Voraussetzungen.

Während die freie Oberfläche einer im Gleichgewichte befindlichen vollkommenen Flüssigkeit eine wagerechte Ebene bilden muss, kann ein fester Körper bei jeder beliebigen Neigung seiner Aufsenfläche im Gleichgewichte sein. Zwischen beiden Körperarten stehen die sog. Erdkörper, welche als Anhäufungen vieler kleinen Steine aufzufassen sind, zu denen aber hinsichtlich der Gleichgewichtsbedingungen auch die Aufschüttungen von Getreidekörnern, von Bleischrot u. dgl. gezählt werden können. Diese (halbflüssigen) Körper lassen sich auf einem wagerechten Boden ohne Seitenwände aufschütten, doch ist die Neigung der freien Oberfläche gewissen Beschränkungen unterworfen.

Während die Theilchen einer vollkommenen Flüssigkeit nur Normaldrücke ausüben können, tritt zwischen den Körnern einer reinen Sandmasse oder sonstiger Schüttungskörper ohne Bindemittel neben dem Normaldrucke noch ein Reibungswiderstand auf. Nennt man φ den entsprechenden Reibungswinkel und $f = \operatorname{tg}\varphi$ die zugehörige Reibungsziffer, so ergiebt sich φ als der für Gleichgewicht eben noch zulässige obere Grenzwerth des Neigungswinkels der freien Oberfläche einer solchen Erdmasse ohne Bindemittel und heifst deshalb auch der natürliche Böschungswinkel. Macht man nämlich, um die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand eines Erdkörpers zu finden, die Annahme, dass das Gleichgewicht bestehe, so würde dieser Zustand keine Störung erfahren, wenn irgend ein Theil der Erdmasse in einen starren Körper überginge.

Führt man daher durch den Erdkörper (Fig. 246) einen ebenen Schnitt mit dem Neigungswinkel α gegen die Wagerechte und betrachtet die Theile zu beiden Seiten des Schnittes als erstarrt, so würde der obere Theil beschleunigt abgleiten, falls $\alpha > \varphi$ wäre. Hat demnach die freie Oberfläche des Erdkörpers an irgend einer Stelle eine Neigung, gröſser als der Reibungswinkel, so ist eine solche Gleitebene möglich, und es wird die Erdmasse nicht im Ruhezustande sein können. Ist die Neigung der freien Oberfläche aber durchweg kleiner als φ, so ist eine derartige Gleitfläche nicht möglich und das Gleichgewicht der Masse ein sicheres, während eine unter den Winkel φ geneigte Oberfläche dem Grenzzustande der Ruhe entspricht.

Fig. 246.



Die Ermittelung dieses natürlichen Böschungswinkels φ kann daher erfolgen, indem man eine aufgeschüttete Erdmasse mit einem Lineale von unten nach oben abstreicht, so dass die Böschung allmählich steiler wird und endlich einstürzt; die dabei erreichte Grenze vor dem Einsturze giebt den gesuchten Winkel. Man kann auch die zu untersuchende Erdmasse auf einem beweglichen Boden zunächst mit flacherer ebener Böschung aufschütten und dann den Boden vorsichtig neigen, so dass dadurch die Böschung allmählich steiler wird.

Das Wasser ist als besonderer Fall einer Erdmasse mit dem natürlichen Böschungswinkel Null zu betrachten.

Ist den Körnern der Schüttung ein Bindemittel beigemengt (z. B. Thon oder Lehm), so kann an einer Schnittebene auch ein Abscherungswiderstand (eine Kohäsion) c für die Flächeneinheit auftreten. Bei lockeren Erdarten wie Sand, Kies, frisch geschütteter Erde, ist dieser Widerstand gering und zu vernachlässigen; erheblich ist er aber bei sog. gewachsenem Boden, bei Erde, die lange gelagert hat, oder die durch Stampfen in einen ähnlichen Zustand gebracht wurde. In Folge einer solchen Scherfestigkeit kann ein Erdkörper auch im Gleichgewichte sein bei einer Böschung, deren Neigungswinkel gröſser ist als der Reibungswinkel φ.

Dichtigkeit γ und Reibungswinkel φ einiger Schüttungsmassen.

	γ	φ	$f = \operatorname{tg} \varphi$
Trockener Lehmboden	1500	40—46°	0,839—1,036
Nasser Lehmboden	1900	20—25°	0,364—0,466
Trockener Thonboden	1600	40—50°	0,839—1,192
Nasser Thonboden	1950	20—25°	0,364—0,466
Feuchte Dammerde	1650	30—35°	0,577—0,700
Sand oder Kies	1600—1860	30°	0,577
Steinschotter	1600	35—40°	0,700—0,839
Roggen	750	25—30°	0,466—0,577
Bleischrot	6800	23—27°	0,424—0,510

II. Gleichgewicht eines geböschten Erdkörpers.

Ein Erdkörper (Fig. 247) habe eine seitliche Böschung unter einem Winkel α, welcher mit Rücksicht auf Scherfestigkeit (Kohäsion) gröfser als der Reibungswinkel φ sei. In einer Höhe h schliefse sich eine flachere Ebene unter einem Neigungswinkel $\beta \leqq \varphi$ an, welche gleichmäfsig mit einer Belastung q für die Flächeneinheit des Grundrisses bedeckt sein soll. Es möge nun die Beziehung zwischen den 4 Gröfsen α, β, h und q gesucht werden, für welche der Erdkörper an der Grenze des Ruhezustandes ist.

Nimmt man an, der Erdkörper sei anfänglich in gesicherter Ruhe, und der Grenzzustand trete dadurch ein, dass vielleicht die Last allmählich vergröfsert, oder der innere Widerstand (etwa durch Zunahme des Feuchtigkeitsgrades) vermindert werde, so wird endlich der Einsturz der Böschung erfolgen, indem ein gewisser Theil des Erdkörpers sich loslöst. Wir machen nun die Voraussetzung, dass die erste Trennung längs einer durch A gehenden Ebene AG erfolge. Diese Annahme einer ebenen Gleitfläche lässt sich freilich nicht begründen; da man aber bis jetzt nicht im Stande ist, die wahre Gestalt der Trennungsfläche anzugeben, so muss man sich mit dieser Voraussetzung noch begnügen.

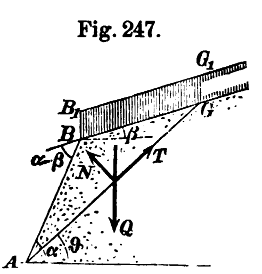
Im Grenzzustande der Ruhe wird der gesammte mögliche Widerstand der Gleitebene mit dem Gewichte des über derselben liegenden Erdprismas (einschliefslich der zugehörigen Belastung) im Gleichgewichte sein müssen.

Die Begrenzungsebenen sowie die Gleitebene sollen rechtwinklig zur Bildfläche stehen, und es möge ein Stück des Erdkörpers betrachtet werden, dessen Länge, rechtwinklig zur Bildebene, gleich Eins sei.

Bezüglich des Gleitwiderstandes der Trennungsebene wird die Annahme gemacht, dass Reibung und Scherwiderstand gleichzeitig wirken, dass deren Summe in Ansatz zu bringen ist (vgl. S. 278, unten). Die Neigung dieser Ebene muss erst noch gefunden werden; daher legen wir einstweilen eine unter dem beliebigen Winkel ϑ geneigte Schnittebene AG durch den Erdkörper und stellen die Gleichgewichtsbedingung für das abgetrennte Erdprisma auf.

Setzt man die Länge der Gleitlinie $AG = l$, so ist dies auch der Flächeninhalt der Gleitebene, und es tritt an derselben ein Abscherungswiderstand τl auf, wenn τ die (gleichmäfsig gedachte) Schubspannung für die Flächeneinheit ist. Zerlegt man das Gesammtgewicht Q des Erdprismas, so ergiebt sich $Q \sin \vartheta$ als abwärts treibende Kraft; $Q \cos \vartheta$ erzeugt einen ebenso grofsen Normalwiderstand N der Schnittebene und einen möglichen Reibungswiderstand $fN = fQ \cos \vartheta$, so dass im Grenzzustande der Ruhe ein gesammter Tangentialwiderstand $T = fQ \cos \vartheta + \tau l$ entsteht und $Q \sin \vartheta = fQ \cos \vartheta + \tau l$ sein muss. Vertauscht man f mit $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi : \cos \varphi$, so kann man vorstehende Gleichung auch schreiben

Fig. 247.



1) $$\tau = \frac{Q \sin (\vartheta - \varphi)}{l \cos \varphi}.$$

Dies ist diejenige Schubspannung, welche an der beliebigen Schnittebene AG auftreten muss, damit das abgetrennte Erdprisma gerade an der Grenze des Ruhezustands sei. Die Belastung q kann man sich als aus Steinen gebildet denken, welche gleiche Dichtigkeit γ mit der Erde haben und auf der Oberfläche

aufgeschichtet sind, dann ist die Belastungshöhe $BB_1 = q:\gamma$, und es wird das Gewicht des Erdprismas

$Q = \gamma\,(ABG + BB_1G_1G) = \gamma\,(^1/_2\, AB \sin(\alpha - \vartheta)\, l + {}^q/_\gamma\, BG \cos\beta)$.

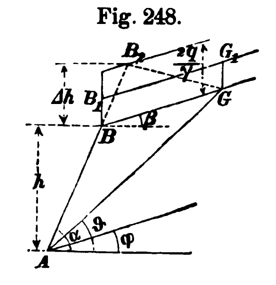
Es ist aber

$$BG = l\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin(\alpha - \beta)} \quad \text{und} \quad AB = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad \text{daher}$$

$$2) \qquad Q = \frac{\gamma\, l}{2}\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha}\left(h + \frac{2\,q}{\gamma}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}\right).$$

Der letzte Summand hat eine einfache geometrische Bedeutung (Fig. 248): Trägt man nämlich die Höhe $BB_1 = q:\gamma$ nochmals über B_1 auf und zieht durch den Endpunkt der Auftragung eine Parallele zur oberen Begrenzung BG, so möge die Verlängerung der Böschung diese Parallele in B_2 schneiden; zieht man dann noch B_2G, so hat man das Parallelogramm BB_1G_1G, welches die Belastung darstellte, in das Dreieck BB_2G verwandelt, so dass Q nun einfach durch das große Dreieck AB_2G dargestellt wird. Der Werth

Fig. 248.



$$3) \qquad \frac{2\,q}{\gamma}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \Delta h$$

ist, wie man leicht findet, der Höhenunterschied der beiden Punkte B und B_2, und

$$h + \frac{2\,q}{\gamma}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} = h + \Delta h$$

der ganze Höhenunterschied der Punkte A und B_2. Gl. 2 kann nun kürzer

$$Q = \frac{\gamma\, l}{2}\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha}(h + \Delta h)$$

geschrieben werden, so dass aus Gl. 1

$$4) \qquad \tau = \frac{\gamma}{2}\frac{h + \Delta h}{\sin\alpha\cos\varphi}\sin(\alpha - \vartheta)\sin(\vartheta - \varphi)$$

wird. Die für den Ruhezustand des beliebigen Erdprismas ABG erforderliche Schubspannung ist von der Neigung ϑ der Schnittebene abhängig. Für $\vartheta = \alpha$ und für $\vartheta = \varphi$ wird $\tau = 0$; dazwischen muss es einen Werth von ϑ geben, für den τ ein

Maximum wird.*) Man bekommt diesen, wenn man die Abgeleitete von

$$\sin(\alpha - \vartheta)\sin(\vartheta - \varphi)$$

(nach ϑ genommen) gleich Null setzt. Dies giebt

$$0 = \sin(\alpha - \vartheta)\cos(\vartheta - \varphi) - \cos(\alpha - \vartheta)\sin(\vartheta - \varphi) = \sin(\alpha + \varphi - 2\vartheta),$$

mithin $\alpha + \varphi - 2\vartheta = 0$ oder

$$\vartheta = {}^1/_2(\alpha + \varphi). \tag{5}$$

An der hierdurch festgelegten Schnittebene AG (Fig. 248) ist der zum Gleichgewicht erforderliche Schubwiderstand am gröfsten, an ihr wird daher auch am ersten ein Abgleiten stattfinden können, d. h. diese Schnittebene AG ist die Gleitebene. Legt man durch A eine unter dem Reibungswinkel φ geneigte Ebene, so würde diese die natürliche Böschung (ohne das Vorhandensein der Scherfestigkeit) sein. Da ϑ nach Gl. 5 das arithmetische Mittel aus α und φ, so halbirt die Gleitebene den Winkel $\alpha - \varphi$ zwischen der vorhandenen und der natürlichen Böschung.

Mit dem Werthe $\vartheta = {}^1/_2(\alpha + \varphi)$ werden die Ausdrücke in Gl. 4: $\alpha - \vartheta$ und $\vartheta - \varphi$ beide gleich ${}^1/_2(\alpha - \varphi)$; es ergiebt sich daher $\sin(\alpha - \vartheta)\sin(\vartheta - \varphi) = \sin^2 \frac{\alpha - \varphi}{2}$, wofür man auch ${}^1/_2 - {}^1/_2 \cos(\alpha - \varphi)$ schreiben kann. Setzt man nun für den Maximalwerth von τ die Scherfestigkeit oder Kohäsion c der Erdmasse ein, so wird dadurch ausgedrückt, dass an der Gleitebene die volle Scherfestigkeit zur Wirkung kommen soll; man erhält also die Bedingung für den Grenzzustand der Ruhe des Erdkörpers:

$$c = \frac{\gamma}{2} \frac{h + \Delta h}{\sin\alpha\cos\varphi} \frac{1 - \cos(\alpha - \varphi)}{2}. \tag{6}$$

Die Gröfse c für eine Erdart lässt sich nicht gut unmittelbar durch Versuche bestimmen; vielmehr geschieht dies, nachdem φ bereits gefunden, mittelbar durch die Prüfung der sog. Standhöhe h_0, d. h. derjenigen Höhe, bis zu welcher sich eine senkrechte Wand durch Abgraben herstellen lässt, ohne einzustürzen. Ist der betr. Erdkörper dabei aber unbelastet, so

---

*) A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik, 1. Auflage, Hannover 1873, S. 297.

kann man das gefundene h_0 für $h + \Delta h$ in Gl. 6 einsetzen; vertauscht man zugleich noch α mit 90^0 und $\cos(90^0 - \varphi)$ mit $\sin\varphi$, so entsteht

$$7) \qquad c = \frac{\gamma}{2} \frac{h_0}{\cos\varphi} \frac{1 - \sin\varphi}{2}.$$

Die Verbindung der Gl. 6 und 7 führt dann zu

$$8) \qquad h + \Delta h = h_0 \sin\alpha \cdot \frac{1 - \sin\varphi}{1 - \cos(\alpha - \varphi)}.$$

Die Neigung β der Oberfläche hat nur auf Δh (Gl. 3) Einfluss. Ist $q = 0$, also $\Delta h = 0$, so ist β gleichgültig, solange $\beta \leqq \varphi$. Für $\alpha = \varphi$ wird $h + \Delta h = \infty$.

Ist die obere belastete Ebene wagerecht, d. h. $\beta = 0$, so wird nach Gl. 3 $\Delta h = 2\, q/\gamma$; die Belastungshöhe q/γ wirkt dann also auf die Standfestigkeit des Erdkörpers ebenso ein, als wenn die steile Böschung um das Doppelte dieser Höhe sich weiter aufwärts erstreckte. Es kommt dies daher, dass die Belastung nur den Reibungswiderstand an der Gleitfläche, nicht aber den Scherwiderstand verstärkt, während bei einer Erhöhung des ganzen Erdkörpers beide Widerstände zunehmen.

Die Standhöhe h_0 kann bei gewachsener oder gestampfter Dammerde zu 1^{m}, bei Lehm- und Thonerde zu 2^{m} angenommen werden. Durchnässung vermindert sowohl den Reibungswinkel wie die Standhöhe. Bei Bauten für längere Dauer ist es räthlich, sich auf die Scherfestigkeit der Erde nicht zu verlassen, d. h. $h_0 = 0$ zu setzen.

Beispiel: Für eine Erdart sei $\varphi = 30^0$, die Standhöhe $h_0 = 1^{\text{m}}$; es soll diejenige Höhe berechnet werden, bis zu welcher eine Böschung unter dem Winkel $\alpha = 45^0$ möglich ist. Es wird nach Gl. 8

$$h + \Delta h = 1 \cdot 0{,}707 \frac{1 - 0{,}5}{1 - 0{,}966} = 10{,}4^{\text{m}}.$$

Ist die obere Fläche unbelastet, so wird auch $h = 10{,}4^{\text{m}}$, ist sie aber vielleicht mit einem Eisenbahnzuge belastet, dessen Gewicht durch eine Erdschicht von $q/\gamma = 1^{\text{m}}$ ersetzt werden kann, so wird (bei $\beta = 0$) $\Delta h = 2^{\text{m}}$, so dass dann noch $10{,}4 - 2 = 8{,}4$ Böschungshöhe möglich ist.

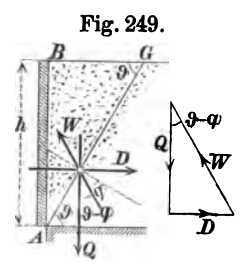
Die Annahme, dass an der Gleitfläche Reibung und Scherwiderstand in ihrer Summe auftreten, ist nicht recht begründet, vielmehr als ein Nothbehelf zu bezeichnen. Der hierin liegende Mangel wird dadurch einigermaßen wieder ausgeglichen, dass man an Stelle von c die nach derselben Annahme berechnete Standhöhe einführt. Eine zutreffendere Berechnung wurde von Dr. Schäffer durchgeführt*), doch ist diese umständlicher.

*) Dr. Schäffer. Deutsche Bauzeitung 1878, S. 284.

III. Normaldruck einer wagerecht begrenzten Erdmasse gegen eine lothrechte Ebene.

Eine Erdmasse mit wagerechter Oberfläche sei durch eine lothrechte Wand AB von der Höhe h in solch besonderer Weise gestützt, dass zwischen beiden nur ein Normaldruck D auftreten kann (Fig. 249). Um die für den Grenzzustand der Ruhe des Erdkörpers erforderliche Gröſse dieses Druckes zu ermitteln, lege man wiederum durch A eine Schnittebene AG mit dem beliebigen Neigungswinkel ϑ und bestimme diejenige Kraft D, welche eben ausreicht, um das Abgleiten des Erdkörpers ABG zu verhindern. Die Scherfestigkeit (Kohäsion) werde zunächst vernachlässigt, so dass der Gesammtwiderstand W der Gleitebene um den Reibungswinkel φ von der Normalen zu AG abweicht, mit dem Gewicht Q des Erdprismas also den Winkel $\vartheta - \varphi$ einschlieſst. Die Kräfte Q, D und W müssen sich im Gleichgewichte halten, mithin sich in einem Punkte schneiden und ein geschlossenes Kräftedreieck bilden, woraus sich

Fig. 249.



$$D = Q \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)$$

ergiebt, oder, weil

$$Q = \gamma \cdot ABG = \frac{\gamma h^2}{2 \operatorname{tg} \vartheta},$$

1) $$D = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Die Gröſse D ist von ϑ abhängig; für $\vartheta = \varphi$ und für $\vartheta = 90^0$ wird $D = 0$; dazwischen muss ein Maximum liegen, und dieser gröſste Werth ist dann erst der Druck, welchen die Wand auf den Erdkörper ausüben muss, damit längs keiner der möglichen, durch A gehenden Schnittebenen ein Abgleiten stattfinde. Diejenige Schnittebene, welche diesem Maximum entspricht, ist die Gleitebene. An ihr muss ein Widerstand W auftreten, der um den vollen Reibungswinkel von der Normalen abweicht, d. h. es muss an ihr der volle Reibungswiderstand wirksam werden, damit kein Abgleiten eintrete; an allen übrigen durch A gedachten Schnittebenen kommt dann thatsächlich nicht der volle Reibungswiderstand zur Wirkung.

Von Gl. 1 braucht nur der veränderliche Theil $\frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\operatorname{tg}\vartheta}$ auf Maximum untersucht zu werden; setzt man die Abgeleitete nach ϑ gleich Null, so entsteht, da ϑ zwischen φ und 90^0 liegt, also $\operatorname{tg}\vartheta$ endlich ist,

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\cos^2(\vartheta - \varphi)} - \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\cos^2\vartheta} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sin\vartheta\cos\vartheta = \sin(\vartheta - \varphi)\cos(\vartheta - \varphi), \qquad \text{mithin}$$

$$\sin 2\vartheta = \sin(2\vartheta - 2\varphi).$$

Da nun die Winkel 2ϑ und $2\vartheta - 2\varphi$ nicht einander gleich sein können, so müssen sie sich zu 180^0 ergänzen, damit ihre Sinus gleich werden. Aus $4\vartheta - 2\varphi = 180^0$ wird dann

2) $$\vartheta = {}^1\!/_2\,(90^0 + \varphi).$$

Dies bedeutet wiederum (vgl. Gl. 5, S. 277), dass die Gleitebene den Winkel zwischen der Wand und der natürlichen Böschung halbirt. $\vartheta - \varphi$ wird dann $= {}^1\!/_2\,(90^0 - \varphi)$. Da sich hiernach ϑ und $\vartheta - \varphi$ zu 90^0 ergänzen, so wird $1 : \operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)$, mithin

$$\frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\operatorname{tg}\vartheta} = \operatorname{tg}^2(\vartheta - \varphi) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90^0 - \varphi}{2}\right)$$

und

3) $$D = {}^1\!/_2\,\gamma\,h^2\,\operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1\!/_2\,\varphi).$$

Setzt man

4) $$\gamma\,\operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1\!/_2\,\varphi) = \gamma\,\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = k,$$

so kann man kürzer schreiben

5) $$D = {}^1\!/_2\,k h^2.$$

Nachdem Richtung und Gröfse des Druckes bestimmt sind, muss nun noch seine L a g e ermittelt werden, oder die Höhe e desjenigen Punktes M, (Fig. 250), in welchem D die Wandfläche schneidet; man nennt ihn den A n g r i f f s p u n k t. Dabei ist zu bedenken, dass zwischen der Wand und dem Erdkörper eine s t e t i g e Druckvertheilung stattfindet und dass D die Mittelkraft unendlich vieler gleichgerichteten Parallelkräfte darstellt. Um den Druck dD auf ein in der Tiefe z unter der Oberkante B

Fig. 250.

gelegenes Flächentheilchen von der Höhe dz zu erhalten, bedenke man, dass der ganze Druck D_z auf den oberen Theil $BC = z$ der Wand sich aus Gl. 5 ergiebt, indem man h mit z vertauscht. $D_z = \frac{1}{2} kz^2$ giebt dann durch Differentiation

$$dD = kz\,dz.$$

Es muss nun in Bezug auf den Punkt B das Moment der Mittelkraft D gleich der Momentensumme der Einzelkräfte dD sein, oder

$$D(h - e) = \int dD \cdot z = k \int_0^h z^2\,dz.$$

Das giebt

$$\frac{kh^2}{2}(h - e =) \frac{kh^3}{3} \quad \text{und} \quad h - e = \frac{2}{3} h,$$

mithin

6) $$e = \frac{1}{3} h.$$

Die Abgeleitete $\frac{dD}{dz} = kz$ bedeutet den in der Tiefe z herrschenden Druck auf die Flächeneinheit und werde mit p bezeichnet. Es entspricht dann die Gleichung $p = kz$ ganz dem Ausdrucke für den hydrostatischen Druck, nur ist k statt der Dichte γ gesetzt. Für $\varphi = 0$ wird $\mathrm{tg}^2(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = \mathrm{tg}^2 45^0 = 1$, und die Formeln 3—6 gelten dann für Wasserdruck.

Die Darstellung von $p = kz$ liefert die Gerade BE mit dem Ansteigungsverhältnisse k gegen BA, und $dD = kz\,dz = p\,dz$ ist dann ein wagerechter Flächenstreifen von der Höhe dz. Die wagerechten Ordinaten von BE geben daher das Gesetz der Vertheilung des Druckes über die Wandhöhe. Es ist $AE = kh$, der Inhalt des Druckdreiecks ABE (nämlich $\frac{1}{2} kh \cdot h) = D$, dem Gesammtdrucke, und da dies Dreieck als Belastungsfläche für die Wand betrachtet werden kann, so muss die Höhe des Schwerpunkts S des Dreiecks zugleich die Höhe des Angriffspunktes M sein, woraus sich wiederum $e = \frac{1}{3} h$ ergiebt.

Aktiver und passiver Erddruck. Die im Vorstehenden berechnete Kraft

$$D = \frac{1}{2} \gamma h^2 \,\mathrm{tg}^2 (45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$$

genügte gerade, um das Abgleiten der Erde zu verhindern. Die im Inneren des Erdkörpers auftretenden Reibungswiderstände unterstützten die Kraft D in der Erhaltung des Gleichgewichtes. Lässt man aber nun die Kraft D allmählich gröfser werden, so

wird endlich der Fall eintreten, dass die Wand sich nach der Seite des Erdkörpers in Bewegung setzt, indem ein gewisser Theil desselben nach oben hinausgeschoben wird. Für den Grenzfall, dass die Erde im Begriff ist, nachzugeben, wollen wir den Druck der Platte mit D_1 bezeichnen und seine Größe berechnen. Man verfährt dabei in derselben Weise, wie bei der vorigen Untersuchung, legt durch A (Fig. 251) eine beliebige Schnittebene und hat nun den Reibungswiderstand an derselben **abwärts** gerichtet anzubringen, so dass der Gesammtwiderstand W jetzt in die entgegengesetzte Grenzlage kommt (gegenüber dem früheren Falle) und mit der Lothrechten den Winkel $\vartheta + \varphi$ einschliefst. Es wird dann

Fig. 251.

$$7)\qquad D_1 = Q\,\mathrm{tg}\,(\vartheta + \varphi) = \frac{\gamma h^2}{2}\,\frac{\mathrm{tg}\,(\vartheta + \varphi)}{\mathrm{tg}\,\vartheta}.$$

Für $\vartheta = 90^0 - \varphi$ und für $\vartheta = 0$ wird $D_1 = \infty$, während für Zwischenwerthe von ϑ sich im Allgemeinen endliche Größen für D_1 ergeben. Man hat nun denjenigen Werth von ϑ zu suchen, für welchen D_1 ein Minimum wird. Die hierdurch bestimmte Schnittfläche AG ist die Gleitebene, an welcher am leichtesten ein Aufwärtsschieben möglich ist, an welcher es daher auch wirklich eintreten wird, wenn D_1 entsprechend zunimmt. Diesen Minimalwerth der Gl. 7 darf also der Druck der Wand nicht überschreiten, wenn der Erdkörper in Ruhe bleiben soll. Zur Berechnung desselben muss $dD_1 : d\vartheta = 0$ gesetzt werden, und da nun Gl. 7 sich von Gl. 1 nur durch das Vorzeichen von φ unterscheidet, so muss (mit Rücksicht auf Gl. 2 und 3) jetzt

$$8)\qquad \vartheta = {}^1/_2\,(90^0 - \varphi) \quad \text{und}$$

$$9)\qquad D_1 = {}^1/_2\,\gamma h^2\,\mathrm{tg}^2\,(45^0 + {}^1/_2\,\varphi)$$

werden. Um die Neigung der Gleitebene durch Zeichnung zu finden, müsste man jetzt den Reibungswinkel φ an die Wagerechte durch A nach **unten** auftragen und den stumpfen Winkel zwischen der so erhaltenen natürlichen Böschung AF und der Wand halbiren. Die Lage von D_1 stimmt mit derjenigen von D

überein, weil ja D_1 ebenfalls in der Form $D_1 = {}^1/_2\, k_1 h^2$ geschrieben werden kann, wenn man nur in Gl. 4 für k das Vorzeichen von φ umkehrt.

Der Werth von D nach Gl. 3 heifst der **aktive Erddruck**, weil der Erdkörper nur diese Kraft auf die Platte ausübt, wenn er im Begriff ist, vorzurücken und die Platte vor sich her zu schieben, also gegen die Platte aktiv zu wirken.

Der gröfsere Werth D_1 aber nach Gl. 9 heifst der **passive Erddruck** oder der **Erdwiderstand**, weil bei dem Vorgange, der zur Berechnung von D_1 angenommen ist, der Erdkörper sich widerstehend oder passiv gegen die Platte verhält. Er kommt in Frage, wenn sich ein Pfosten, eine Strebe, ein Bogenträger oder ein Gewölbe gegen einen Erdkörper stützt. Zwischen diesen beiden Grenzwerthen, dem aktiven und dem passiven Erddrucke, wird die Gröfse der Kraft stets liegen, die ein Erdkörper ausübt. Für $\varphi = 30^0$ wird

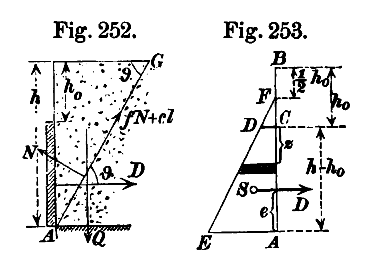
$$k = \gamma\,\mathrm{tg}^2\, 30^0 = {}^1/_3\,\gamma\,, \quad k_1 = \gamma\,\mathrm{tg}^2\, 60^0 = 3\,\gamma\,,$$

der passive Erddruck also 9 mal so grofs wie der aktive, und es ist zuweilen recht schwierig, die Gröfse des wirklichen Erddrucks in bestimmten Fällen anzugeben.

Berücksichtigung der Scherfestigkeit (Kohäsion) der Erde. Tritt zu der Reibung an der Schnittebene noch die Scherfestigkeit hinzu, so muss man Normal- und Tangentialwiderstand einzeln einführen; es müssen daher (Fig. 252) D, Q, N und $fN + cl$ im Gleichgewichte sein, wenn wiederum

$$l = AG = h : \sin\vartheta$$

ist. In der Richtung von AG ergiebt sich



$$D\cos\vartheta = Q\sin\vartheta - fN - cl\,,$$

rechtwinklig dazu: $N = Q\cos\vartheta + D\sin\vartheta$, mithin wird

$$D(\cos\vartheta + f\sin\vartheta) = (Q\sin\vartheta - f\cos\vartheta) - cl$$

oder, wenn man f mit $\sin\varphi : \cos\varphi$ vertauscht,

$$D\cos(\vartheta - \varphi) = Q\sin(\vartheta - \varphi) - ch\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\,,$$

also

$$10)\qquad D = \frac{\gamma h^2}{2}\,\frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)}{\operatorname{tg}\vartheta} - \frac{c\,h\cos\varphi}{\sin\vartheta\cos(\vartheta-\varphi)}.$$

Das erste Glied der rechten Seite wird (nach S. 280) für $\vartheta = 45^0 + {}^1/_2\,\varphi$ zum Maximum, und man überzeugt sich leicht, dass der Nenner des zweiten Gliedes, nämlich $\sin\vartheta\cos(\vartheta - \varphi)$, für $\vartheta = 45^0 + {}^1/_2\,\varphi$ ebenfalls seinen größten Werth $\cos^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi)$ erreicht; hierdurch wird also das zweite Glied selbst ein Minimum und mit Einbeziehung seines negativen Vorzeichens ebenfalls ein Maximum. Die Neigung der Gleitebene ist hiernach dieselbe wie ohne Berücksichtigung der Schubfestigkeit, der aktive Erddruck aber wird

$$11)\qquad D = \frac{\gamma h^2}{2}\operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi) - \frac{c\,h\cos\varphi}{\cos^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi)}.$$

Dieser Druck wird zu Null für eine Wandhöhe $h = h_0$, wenn

$$\frac{\gamma h_0}{2}\operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi) = \frac{c\cos\varphi}{\cos^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi)} \quad \text{oder}$$

$$12)\qquad h_0 = \frac{2\,c\cos\varphi}{\gamma\sin^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi)} = \frac{4\,c\cos\varphi}{\gamma(1 - \sin\varphi)};$$

d. h. auf diese Höhe hält sich der Erdkörper ohne eine Wand, h_0 ist daher wieder die auf S. 277 eingeführte Standhöhe. Setzt man den aus letzter Gleichung gefundenen Werth

$$c\cos\varphi = {}^1/_2\,\gamma\,h_0\sin^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi)$$

in Gl. 11 ein, so entsteht

$$D = {}^1/_2\,\gamma\,h^2\operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi) - {}^1/_2\,\gamma\,h\,h_0\operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi) \quad \text{oder}$$

$$13)\qquad D = {}^1/_2\,\gamma\,h\,(h - h_0)\operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi) = {}^1/_2\,k\,h\,(h - h_0),$$

wenn wiederum $\gamma\operatorname{tg}^2(45^0 - {}^1/_2\,\varphi) = k$ eingeführt wird.

Dieser Druck vertheilt sich nicht auf die ganze Höhe der Wand, sondern nur auf $h - h_0$, weil der obere Theil h_0 keinen Druck erfährt. Um das Gesetz der Vertheilung zu finden, vertausche man in Gl. 13 h mit $z + h_0$ (Fig. 253), dann ergiebt sich $D_z = {}^1/_2\,k\,(z + h_0)\,z$ und

$$p = \frac{dD}{dz} = k\,(z + {}^1/_2\,h_0). \quad \text{Für}$$

$$z = 0 \text{ wird } p = k\cdot{}^1/_2\,h_0 = CD, \quad \text{für}$$

$$z = h - h_0 \text{ wird } p = k\,(h - {}^1/_2\,h_0) = AE,$$

und man erhält das Drucktrapez $ACDE$, dessen nicht parallele Seiten sich bei F in der Mitte der Standhöhe h_0 schneiden. Die Neigung der Geraden DE gegen CA ist dieselbe wie im vorigen Falle (ohne Scherfestigkeit) (S. 280), es ist nur der Schnittpunkt beider von B nach F gerückt. Die Höhe e des Schwerpunktes des Trapezes über der Grundlinie, gleichbedeutend mit der Höhe des Angriffspunktes von D, findet man leicht zu

$$e = \frac{h}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h_0}{h} - \frac{1}{2}\frac{h_0^2}{h^2}\right).$$

Da $e < {}^1\!/_3\, h$, so folgt, dass die Scherfestigkeit nicht nur die Gröfse des aktiven Erddrucks D vermindert, sondern auch seinen Angriffspunkt senkt.

IV. Druck eines überhöhten Erdkörpers gegen eine Stützmauer.

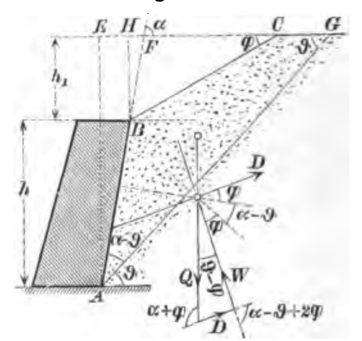
Wird eine Mauer, die zur Stützung eines Erdkörpers bestimmt ist, mit Erde hinterfüllt, so muss sie durch den Druck derselben eine Formänderung erfahren und (wenn auch nur in geringem Mafse) ausweichen. Dadurch wird an einer vom Fufspunkte des Erdkörpers ausgehenden Gleitebene eine abwärts gerichte Bewegung eingeleitet, welcher sich der volle Gleitwiderstand entgegensetzt. Es folgt daraus, dass, solange dieser anfängliche Zustand erhalten bleibt, die Stützmauer nur den aktiven Erddruck auszuhalten hat. Auf die Scherfestigkeit der Erde soll im Folgenden keine Rücksicht mehr genommen werden, so dass wir an der Gleitebene nur mit dem Normalwiderstande N und der Reibung fN, oder mit dem Gesammtwiderstande W zu thun haben, welcher von der Normalen um den Reibungswinkel φ abweicht. Wenn sich aber durch Nachgeben der Mauer der Raum an ihrer Rückseite vergröfsert, so wird das Erdprisma auch an der Wand ein wenig abwärts gleiten, wodurch auch an dieser der volle Reibungswiderstand hervorgerufen wird. Die Rückseite der Mauer bildet daher eine zweite Gleitfläche. Dieselbe werde als eben vorausgesetzt, dann wird der an ihr auftretende Gesammtdruck, d. h. der gegen die Stützmauer zur Wirkung kommende Erddruck D um den vollen Reibungswinkel von der Normalen zur Wand abweichen.

Die Kräfte W und D müssen nun dem Gewichte Q des Erdprismas das Gleichgewicht halten.

Ist die Reibungsziffer für Erde gegen Mauerwerk gröfser als die für Erde gegen Erde, so wird dieser Umstand der Sicherheit der Mauer nicht zu statten kommen, weil in diesem Falle eine sehr dünne Erdschicht sich an der Mauer festhängen, das Gleiten aber unmittelbar dahinter in dem Erdkörper stattfinden kann. Bei geringerer Reibung dagegen zwischen Mauer und Erde müsste auch der entsprechende kleinere Reibungswinkel in Ansatz gebracht werden. Wir machen die Annahme, dass der letztere Fall nicht vorliegt, dass also derselbe Reibungswinkel φ für die Gleitebene und für die Mauer zur Anwendung kommt.

Die Rückwand AB der Mauer (Fig. 254) habe eine Neigung α gegen die Wagerechte und eine Höhe h; von dem Punkte B steige der Erdkörper unter dem natürlichen Böschungswinkel φ noch um eine Höhe h_1 an und sei dann wagerecht begrenzt.

Fig. 254.



Man führe nun einen Schnitt AG, so dass Q das Gewicht des Erdkörpers $ABCG$ bedeutet. Die Kräfte D, Q und W müssen dann ein geschlossenes Dreieck bilden. Der Winkel zwischen Q und W ist wiederum $\vartheta - \varphi$ wie in Fig. 249, S. 279. Bezüglich des Winkels zwischen D und W ist zu bedenken, dass, wenn beide Kräfte Normaldrücke wären, sie denselben Winkel $\alpha - \vartheta$ mit einander bilden müssten wie die betreffenden Ebenen AB und AG; dadurch aber, dass jede der Kräfte von der Normalen um φ abweicht, vergröfsert sich ihr Schnittwinkel um 2φ, beträgt daher $\alpha - \vartheta + 2\varphi$. Zur Abkürzung werde

1) $$\alpha + 2\varphi = \varepsilon$$

gesetzt, so dass $\alpha - \vartheta + 2\varphi = \varepsilon - \vartheta$. Der Aufsenwinkel des Dreiecks zwischen den Richtungen Q und D ergiebt sich als Summe der beiden gegenüber liegenden Dreieckswinkel zu $\alpha + \varphi$. Nach dem Sinus-Satze wird nun

2) $$\frac{D}{Q} = \frac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin(\varepsilon - \vartheta)}.$$

Zur Berechnung der Fläche $ABCG$ zerlegt man sie in rechtwinklige Dreiecke:

$$ABCG = AEG - AEF - (BCH - BFH)$$
$$= \tfrac{1}{2}(h + h_1)^2 (\cot \vartheta - \cot \alpha) - \tfrac{1}{2} h_1^2 (\cot \varphi - \cot \alpha);$$

dann wird

$$Q = \gamma \frac{(h + h_1)^2}{2} \left\{ \cot \vartheta - \cot \alpha - \frac{h_1^2}{(h + h_1)^2} (\cot \varphi - \cot \alpha) \right\}.$$

Die 3 letzten Glieder sind von ϑ unabhängig, weshalb zur Abkürzung

$$\text{3)} \qquad \cot \alpha + \frac{h_1^2}{(h + h_1)^2} (\cot \varphi - \cot \alpha) = m$$

gesetzt werden möge, dann wird nach Gl. 2:

$$D = \gamma \frac{(h + h_1)^2}{2} \frac{(\cot \vartheta - m) \sin (\vartheta - \varphi)}{\sin (\varepsilon - \vartheta)}.$$

Weil aber die Abgeleitete hiervon nach ϑ gleich Null gesetzt und daraus ϑ bestimmt werden muss, so empfiehlt es sich, ϑ nur mit einer trigonometrischen Funktion auftreten zu lassen; man entwickele daher $\sin(\vartheta - \varphi)$ und $\sin(\varepsilon - \vartheta)$, führe durch geeignete Division und Multiplikation mit $\sin \vartheta$, $\sin \varphi$ und $\sin \varepsilon$ Alles möglichst auf Cotangenten zurück und erhält

$$\text{4)} \qquad D = \gamma \frac{(h + h_1)^2}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} \frac{(\cot \vartheta - m)(\cot \varphi - \cot \vartheta)}{\cot \vartheta - \cot \varepsilon}.$$

Der letzte Theil dieser Gleichung ist eine gebrochene Funktion von ϑ; schreibt man dieselbe $\frac{f(\vartheta)}{F(\vartheta)}$, so ist die Bedingung für Maximum:

$$\text{5)} \qquad F(\vartheta) f'(\vartheta) - f(\vartheta) F'(\vartheta) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\text{6)} \qquad \frac{f(\vartheta)}{F(\vartheta)} = \frac{f'(\vartheta)}{F'(\vartheta)}.$$

Führt man die in Gl. 5 angedeuteten Ableitungen aus und berücksichtigt, dass $d(\cot \vartheta) = -\frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}$ ist, so entsteht nach geeigneter Zusammenziehung:

$$\text{7)} \qquad \cot \vartheta = \cot \varepsilon + \sqrt{(\cot \varphi - \cot \varepsilon)(m - \cot \varepsilon)}.$$

(Da $\vartheta < \alpha$, also auch $\vartheta < \alpha + 2\varphi = \varepsilon$, mithin $\cot\vartheta > \cot\varepsilon$ sein muss, so ist nur das positive Zeichen vor der Wurzel brauchbar.)

Den Werth von $\cot\vartheta$ nach Gl. 7 hätte man nun in Gl. 4 einzusetzen. Weil aber in dieser die Gröfse $\cot\vartheta$ dreimal vorkommt, so ist es bequemer, nach Gl. 6 statt der ursprünglichen Bruchfunktion den Bruch der Abgeleiteten von Zähler und Nenner zu benutzen. Es wird nämlich

$$D = \gamma \cdot \frac{(h+h_1)^2}{2} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \frac{f'(\vartheta)}{F'(\vartheta)}$$

$$= \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \frac{\dfrac{\cot\vartheta - m}{\sin^2\vartheta} - \dfrac{\cot\varphi - \cot\vartheta}{\sin^2\vartheta}}{-\dfrac{1}{\sin^2\vartheta}}$$

oder

$$D = \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} (\cot\varphi + m - 2\cot\vartheta).$$

Hierin kommt $\cot\vartheta$ nur ein Mal vor, ist daher leicht einzusetzen und giebt

$$D = \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \left\{\cot\varphi + m - 2\cot\varepsilon - 2\sqrt{(\cot\varphi - \cot\varepsilon)(m - \cot\varepsilon)}\right\},$$

was sich kürzer schreiben lässt*):

$$8)\qquad D = \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \left\{\sqrt{\cot\varphi - \cot\varepsilon} - \sqrt{m - \cot\varepsilon}\right\}^2,$$

worin $\varepsilon = \alpha + 2\varphi$ und

$$m = \cot\alpha + \frac{h_1^2}{(h+h_1)^2} (\cot\varphi - \cot\alpha).$$

Erdkörper ohne Ueberhöhung (Fig. 255). Für $h_1 = 0$ wird $m = \cot\alpha$, daher (Gl. 7)

$$9)\qquad \cot\vartheta = \cot\varepsilon + \sqrt{(\cot\varphi - \cot\varepsilon)(\cot\alpha - \cot\varepsilon)}$$

und

$$10)\qquad D = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} \left\{\sqrt{\cot\varphi - \cot\varepsilon} - \sqrt{\cot\alpha - \cot\varepsilon}\right\}^2.$$

Jetzt kann D wieder in der einfachen Form

$$D = \tfrac{1}{2} k h^2$$

*) K. v. Ott, Vorträge über Baumechanik, 1. Aufl., I. Theil, S. 27.

geschrieben werden; daher wird das Gesetz der Vertheilung des Druckes D über die Höhe der Wand wieder ein Dreieck von der Grundlinie kh, und es muss der Angriffspunkt M von D wieder in der Höhe

11) $e = \frac{1}{3} h$ liegen.

Fig. 255.

Steht die gedrückte Wandfläche auch noch lothrecht, ist also $\alpha = 90^0$, so wird

$$\cot \alpha = 0, \quad \varepsilon = 90^0 + 2\varphi,$$

mithin

$$\cot \varepsilon = -\operatorname{tg}(2\varphi), \quad \sin \varepsilon = \cos 2\varphi \quad \text{und}$$

$$D = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos 2\varphi} (\sqrt{\cot \varphi + \operatorname{tg} 2\varphi} - \sqrt{\operatorname{tg} 2\varphi})^2,$$

was sich aber auch zu

12) $$D = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\cos \varphi}{(1 + \sqrt{2} \sin \varphi)^2}$$

oder zu $$D = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sqrt{1 + f^2}}{2(f + \sqrt{\frac{1}{2}(1 + f^2)})^2}$$

zusammenziehen lässt, worin $f = \operatorname{tg} \varphi$.

Für $\varphi = 30^0$ wird nach Gl. 12:

$$k = \gamma \frac{\cos \varphi}{(1 + \sqrt{2} \sin \varphi)^2} = 0{,}297\, \gamma$$

und $D = \frac{1}{2} \cdot 0{,}297\, \gamma h^2$, während sich ohne Reibung an der Wand $D = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \gamma h^2$ ergab (S. 283).

Die Gl. 10—12 müssen auch für Wasserdruck gelten. Es wird dann zunächst $\varepsilon = \alpha$ und nach Gl. 10

$$D = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} (\cot \varphi - \cot \alpha) = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\cos \varphi - \sin \varphi \cot \alpha}{\sin \alpha};$$

setzt man hierin $\varphi = 0$, so entsteht richtig

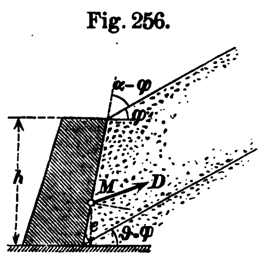
$$D = \frac{\gamma h^2}{2 \sin \alpha}.$$

Unbegrenzt ansteigender Erdkörper. Für $h_1 = \infty$ wird $\frac{h_1}{h + h_1} = 1$, mithin $m = \cot \varphi$ und (Gl. 7, S. 287)

13) $\cot \vartheta = \cot \varphi$, oder $\vartheta = \varphi$,

d. h. die Gleitfläche ist in diesem Falle mit der natürlichen Böschung parallel (Fig. 256). In Gl. 8 wird für $m = \cot\varphi$ der letzte Klammerausdruck Null, der Faktor $(h + h_1)^2$ aber unendlich, so dass D zunächst in der unbestimmten Form $\infty \cdot 0$ erscheint. Um hierfür eine bestimmte Gröfse zu erhalten, muss man für m den ursprünglichen Werth (Gl. 3, S. 287) einführen und muss den Faktor $(h + h_1)^2$ durch den Divisor $1 : (h + h_1)^2$ ersetzen, damit die Form $0:0$ entsteht. Es ist dann

Fig. 256.



$$D = \frac{\gamma}{2}\frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon}\left\{\frac{\sqrt{\cot\varphi - \cot\alpha} - \sqrt{\cot\alpha + \left(\frac{h_1}{h+h_1}\right)^2(\cot\varphi - \cot\alpha) - \cot\varepsilon}}{\frac{1}{h+h_1}}\right\}^2.$$

In dem (bis jetzt unbestimmten) Klammerausdrucke sind nun Zähler und Nenner mit ihren Abgeleiteten nach der Gröfse h_1 zu vertauschen; führt man dann wiederum $h_1 = \infty$ ein, so entsteht nach entsprechender Kürzung der bestimmte Werth

$$D = \frac{\gamma h^2}{2}\frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon}\frac{(\cot\varphi - \cot\alpha)^2}{\cot\varphi - \cot\varepsilon},$$

wofür man mit $\varepsilon = \alpha + 2\varphi$ auch schreiben kann

$$D = \frac{\gamma h^2}{2}\frac{1 - \cos 2(\alpha - \varphi)}{(1 - \cos 2\alpha)\sin(\alpha + \varphi)}. \tag{14}$$

Wiederum erscheint D in der Form $\frac{1}{2} k h^2$, so dass die Druckvertheilung wieder durch ein Dreieck darstellbar ist und der Angriffspunkt M in der Höhe $e = \frac{1}{3} h$ liegt.

Für eine lothrechte Wandfläche oder $\alpha = 90^0$ wird

$$D = \tfrac{1}{2}\gamma h^2 \cos\varphi, \tag{15}$$

was für $\varphi = 30^0$ $D = 0{,}433\,\gamma h^2$ giebt (etwa 3 mal so viel wie bei $h_1 = 0$).

Endliche Ueberhöhung des Erdkörpers. Hat h_1 irgend einen endlichen Werth, so gilt für den Erddruck die Gl. 8 (S. 288). Bei der Ableitung derselben wurde in Fig. 254 vorausgesetzt, dass die Gleitebene AG rechts von dem Punkte C liegt, denn andernfalls würde das abgleitende Erdprisma nicht durch ein

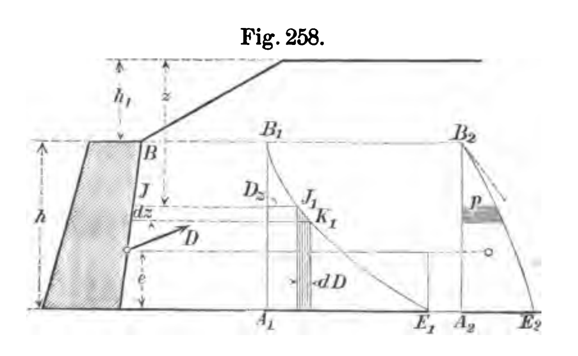
Viereck dargestellt. Von der Richtigkeit dieser Voraussetzung (falls BC unter dem natürlichen Böschungswinkel φ ansteigt) kann man sich in jedem besonderen Falle leicht überzeugen, indem man ϑ nach Gl. 7 berechnet und mit der Neigung einer Geraden AC vergleicht. Man wird dann stets finden, dass die Annahme zutreffend war. Nimmt man nämlich eine bestimmte Ueberhöhung h_1 an, lässt aber die in Betracht kommende Mauerhöhe h von Null an stetig zunehmen, indem man den Fufspunkt A an der Wandfläche allmählich nach unten verschiebt, so ergiebt sich für $h = 0$ die Gleitfläche parallel der natürlichen Böschung (weil dann Gl. 13 gilt), mit wachsendem h wird aber $\cot\vartheta$ kleiner und ϑ langsam gröfser, wobei sich jedoch die verschiedenen Gleitebenen innerhalb des Erdkörpers nicht durchschneiden (Fig. 257).

Fig. 257.

Angriffspunkt des Erddruckes. Die Beziehung zwischen D und h in Gl. 8 ist eine verwickelte, weil in m auch noch die Gröfse h vorkommt; die Druckvertheilung geschieht daher nicht mehr nach einer Dreiecksfläche, und der Angriffspunkt des Erddruckes liegt in Folge dessen auch nicht mehr im unteren Drittelspunkte der Wand; man kann ihn aber stets in folgender Weise bestimmen:

Betrachtet man von der Wand nur das Stück $BJ = z - h_1$ (Fig. 258), so kann man den auf BJ kommenden Druck D_z berechnen, indem man in Gl. 8 $h + h_1$ mit z vertauscht. Trägt man diese Werthe D_z in der Wagerechten durch die zugehörigen Punkte J der Wand von einer Lothrechten A_1B_1 ab, so erhält man eine Kurve B_1E_1, welche man, zum Unterschiede von der Druckvertheilungsfigur, die Gesammtdruck-Kurve nennen kann, und welche als Integralkurve jener zu bezeichnen ist.

Fig. 258.



Zur Ermittelung des Angriffspunktes von D kann man sich diesen Druck und die sämmtlichen Theile $d\,D$ desselben um ihre Angriffspunkte an der Wand gedreht denken, bis sie wagerecht liegen. Dann gilt die Momentengleichung

$$15) \qquad D\,e = \int_{z=h_1}^{z=h+h_1} dD\,(h + h_1 - z)\,.$$

Lässt man aber z um $d\,z$ wachsen, so entspricht der Abscisse $z + d\,z$ ein Kurvenpunkt K_1, und der Grundriss von $J_1 K_1$ stellt $d\,D$ dar, während $h + h_1 - z$ die Höhe des Punktes J_1 über der Grundlinie $A_1 E_1$ ist. Der in der Figur schraffirte lothrechte Flächenstreifen hat daher den Inhalt $d\,D\,(h + h_1 - z)$, und das Integral in Gl. 15 bedeutet den Flächeninhalt von $A_1 B_1 E_1$. Verwandelt man diese Fläche in ein Rechteck von der Breite $A_1 E_1 = D$, so ist dessen Höhe nach Gl. 15 das gesuchte e. Man kann hiernach auch schreiben:

$$16) \qquad D\,e = \int_{h_1}^{h+h_1} D_z\,d\,z\,.$$

In allen Fällen, wo die einfache Beziehung $D = {}^1/_2\,k\,h^2$ gilt, ist die Kurve $B_1 E_1$ eine Parabel mit dem Scheitel B_1, das Parabeldreieck hat dann den Inhalt ${}^1/_3\,h \cdot \overline{A_1 E_1}$, und es wird $e = {}^1/_3\,h$.

Setzt man in Gl. 8

$$\gamma\,\frac{\sin\varphi}{2\sin\varepsilon}\,(\cot\varphi - \cot\varepsilon) = B,$$

$$\frac{\cot\varphi - \cot\alpha}{\cot\varphi - \cot\varepsilon} = C, \qquad \text{mithin}$$

$$\frac{\cot\alpha - \cot\varepsilon}{\cot\varphi - \cot\varepsilon} = 1 - C, \qquad \text{so wird}$$

$$D = B\,(h + h_1)^2 \left(1 - \sqrt{1 - C + \frac{h_1^2}{(h+h_1)^2}\,C}\right)^2 \qquad \text{und}$$

$$D_z = B\left(z - \sqrt{z^2\,(1 - C) + h_1^2\,C}\right)^2; \qquad \text{daher}$$

$$p = \frac{dD}{dz} = 2\,B\left(z - \sqrt{z^2\,(1 - C) + h_1^2\,C}\right)\left(1 - \frac{z\,(1 - C)}{\sqrt{z^2\,(1 - C) + h_1^2\,C}}\right).$$

Hiernach könnte man auch die Druckvertheilungsfigur zeichnen. Besonders wichtig ist, dass für $z = h_1$ $p = 0$ wird, dass also diese Figur wiederum ein Dreieck $A_2 B_2 E_2$ ist, dessen eine Seite allerdings durch eine krumme Linie gebildet wird. Diese hat oben bei B_2 eine Neigung $dp : dz$, welche gleich dem Werthe k für unendliche Ueberhöhung sein muss; nach unten nähert sich diese Neigung mehr und mehr demjenigen Werthe von k, welcher dem Falle $h_1 = 0$ entspricht.

Weil für $z = h_1$ die Abgeleitete $dD : dz = 0$, so ist die Kurve $B_1 E_1$ bei B_1 lothrecht gerichtet.

Führt man die angedeuteten Ermittelungen durch, so findet man, dass die Höhe e des Angriffspunktes von D je nach der Gröfse der Ueberhöhung h_1 und des Reibungswinkels φ zwischen $^1/_3\,h$ und etwa $^3/_8\,h$ schwankt. (Für $h_1 = 0$ und $h_1 = \infty$ hatte sich ja $^1/_3\,h$ ergeben.) Man darf dafür in allen Fällen mit genügender Annäherung

$$e = {}^1/_3\,h$$

setzen und kann sich die mühsame Berechnung des richtigen Werthes ersparen, weil ja das Erdreich fast immer etwas Scherfestigkeit besitzt, deren günstige Wirkung hier ganz vernachlässigt wurde.

Lothrechte Wand mit überhöhtem Erdkörper. Für $\alpha = 90^0$ wird $\cot\alpha = 0$, $\varepsilon = 90^0 + 2\varphi$, $m = \frac{h_1^2}{(h+h_1)^2}\cot\varphi$, daher (Gl. 8)

$$17)\quad D = \frac{\gamma h^2}{2}\left(1 + \frac{h_1}{h}\right)^2 \frac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi}\left\{\sqrt{\cot\varphi + \operatorname{tg} 2\varphi} - \sqrt{\frac{h_1^2}{(h+h_1)^2}\cot\varphi + \operatorname{tg} 2\varphi}\right\}^2.$$

Setzt man $D = {}^1/_2\,k h^2$, so erhält für $\varphi = 30^0$ und für verschiedene Verhältnisse $h_1 : h$ folgende Werthe für k:

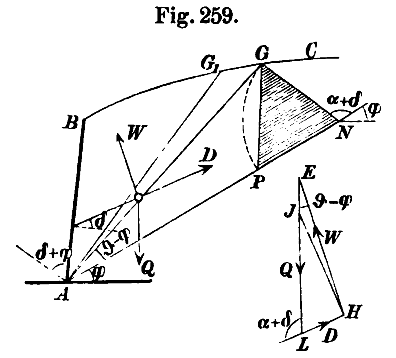
$\frac{h_1}{h}$	$k = \frac{2D}{h^2}$	$\frac{h_1}{h}$	$k = \frac{2D}{h^2}$
0	0,297 γ	1	0,608 γ
0,1	0,353 γ	2	0,702 γ
0,2	0,400 γ	3	0,746 γ
0,3	0,440 γ	4	0,771 γ
0,4	0,475 γ	5	0,789 γ
0,5	0,505 γ	6	0,799 γ
0,6	0,531 γ	10	0,822 γ
0,7	0,554 γ	∞	0,866 γ
0,8	0,574 γ		
0,9	0,592 γ		

V. Zeichnerische Bestimmung des Erddruckes.

Die Berechnung des Erddruckes nach den vorstehenden Formeln ist verhältnismäfsig umständlich; daher ist das nachfolgende, von Rebhann*) angegebene, zeichnerische Verfahren sehr werthvoll.

Die Wand sei eben, der Erdkörper oben durch eine beliebige, rechtwinklig zur Bildebene stehende Cylinderfläche BC begrenzt. Der Winkel, um welchen der Erddruck D von der Normalen zur Wandfläche abweicht, kann noch unbestimmt (von φ verschieden) gelassen und mit δ bezeichnet werden (wobei die Richtung der Abweichung so gedacht ist, wie sie bei abgleitendem Erdkörper auftritt). AG sei die Gleitebene (Fig. 259); dann halten sich an dem Erdprisma ABG die Kräfte Q, D und W im Gleichgewicht und bilden das Kräftedreieck ELH, welches sich dadurch von dem entsprechenden Dreieck in Fig. 254, S. 286 unterscheidet, dass der linksseitige Aufsenwinkel hier $\alpha + \delta$ ist.

Fig. 259.



Die für die Gleitfläche mafsgebende Bedingung $dD : d\vartheta = 0$ oder
$$dD = 0 \cdot d\vartheta$$
kann nun so gedeutet werden, dass, wenn die Schnittebene (nebst dem daran auftretenden Widerstande W) um $d\vartheta$ verdreht wird, die Kraft D ihre Gröfse beibehält. GAG_1 sei dieser Winkel $d\vartheta$, im Kräftedreieck durch EHJ dargestellt; dann ist JLH das Kräftedreieck für das Gleichgewicht des Körpers ABG_1. Das Stück EJ, um welches Q sich vermindert hat, ist hiernach gleich $dQ = \gamma \cdot AGG_1$.

EHJ und AGG_1 können als unendlich kleine Ausschnitte mit dem Centriwinkel $d\vartheta$ angesehen werden und verhalten sich daher wie die Quadrate der Radien, d. h.

$$1) \qquad \frac{EHJ}{AGG_1} = \frac{EH^2}{AG^2}.$$

*) Rebhann, Theorie des Erddrucks und der Futtermauern. Wien 1870, S. 309.

EHJ und EHL verhalten sich aber wie die Grundlinien EJ und EL oder wie dQ und Q, also

$$\frac{EHJ}{EHL} = \frac{dQ}{Q} = \frac{AGG_1}{ABG};$$

verbindet man dies mit Gl. 1, so entsteht

$$\frac{EHL}{ABG} = \frac{EH^2}{AG^2}.$$

Man kann aber leicht ein dem Kräftedreieck ähnliches Dreieck zeichnen, welches zu ihm in dem linearen Verhältnisse $AG:EH$ steht; man lege nämlich durch A die natürliche Böschung AN, so dass $\measuredangle\, GAN = \vartheta - \varphi$ wird, ziehe dann GN so, dass $\alpha + \delta$ bei N als Aufsenwinkel des Dreiecks AGN erscheint, dann ist dieses mit dem Kräftedreieck winkelgleich, und für ihre Inhalte gilt

$$\frac{EHL}{AGN} = \frac{EH^2}{AG^2}.$$

Die Verbindung der beiden letzten Gleichungen führt auf

2) $$AGN = ABG.$$

Die Gleichheit der Flächen AGN und ABG ist also die Bedingung für die Gleitebene AG.

Im Kräftedreieck ist

$$\frac{D}{Q} = \frac{LH}{EL};$$

in demselben Verhältnisse stehen aber in dem ähnlichen Dreiecke AGN die Seiten GN und AN, so dass

$$D = Q \cdot \frac{GN}{AN} = \gamma \cdot ABG \cdot \frac{GN}{AN} = \gamma \cdot AGN \cdot \frac{GN}{AN}$$

wird. Das Dreieck AGN lässt sich aber leicht in dem Verhältnisse $GN:AN$ verkleinern: Macht man $NP = NG$ und zieht PG, so ist $PGN:AGN = PN:AN$
$= GN:AN$,

also ist

3) $$D = \gamma \cdot PGN,$$

d. h. der Erddruck D ist gleich dem Gewichte eines Erdprismas von Querschnitt PGN.

Bei beliebiger oberer Begrenzung BC zeichne man hiernach die natürliche Böschung durch A, ziehe nach dem Augenmafse AG

und prüfe nun die Gleichheit der Flächen ABG und AGN, welche man nach einigen kleinen Verschiebungen von G mit genügender Genauigkeit erreichen kann.

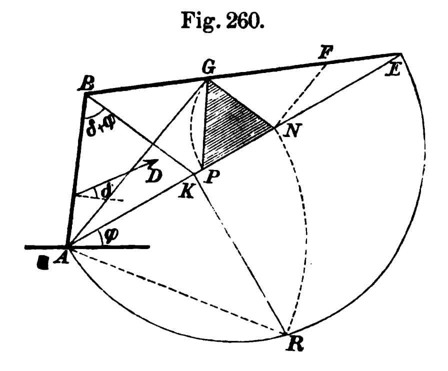
Die Gerade GN, welche mit AN den Winkel $\alpha + \delta$ bildet, schneidet die Wagerechte offenbar unter dem (um φ gröſseren) Winkel $\alpha + \delta + \varphi$. Die Richtung von GN ergiebt sich daher leicht, indem man an die Wandfläche AB (Fig. 259) (welche gegen die Wagerechte die Neigung α hat) bei A den Winkel $\delta + \varphi$ nach auſsen anträgt (für $\delta = \varphi$ also 2φ). Zu dieser Stellungslinie ist dann GN parallel zu ziehen.

Bei ebener Erdoberfläche lässt sich die Gleitebene unmittelbar finden (Fig. 260). Hat sie nämlich die Lage AG, und muss also $ABG = AGN$ sein, so ist die Höhe dieser beiden Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie AG die gleiche. Daraus folgt, dass, wenn $NF \# AG$ gezogen wird,

$$BG = GF$$

sein muss. Trägt man den Winkel $\delta + \varphi$ dies Mal bei B an die innere Seite der Wand, so dass BK die Stellungslinie wird (zu welcher GN parallel sein muss), so erhält die Figur nun 2 Paare von Parallelen, woraus sich folgende Verhältnisse ergeben:

Fig. 260.



$$\frac{GF}{GE} = \frac{AN}{AE} \quad \text{und} \quad \frac{BG}{GE} = \frac{KN}{NE},$$

oder, weil $BG = GF$,

$$\frac{AN}{AE} = \frac{KN}{NE} = \frac{AN - AK}{AE - AN}.$$

Dies giebt $AE \cdot AN - AN^2 = AE \cdot AN - AE \cdot AK$ oder

4) $$AN^2 = AE \cdot AK, \quad \text{d. h.}$$

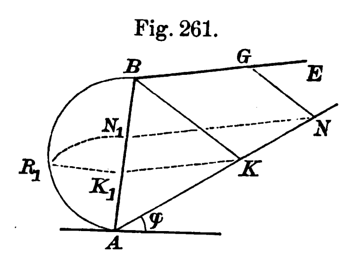
der Punkt N ist so zu bestimmen, dass AN die mittlere Proportionale zu AE und AK ist. Man beschreibe daher über AE einen Halbkreis und ziehe durch K die Rechtwinklige KR zu AE, dann ist $\overline{AR}^2 = AE \cdot AK$. Man braucht sonach

nur $AN = AR$ zu machen; zieht man dann $NG \nparallel BK$, so ist AG die Gleitebene. Das Erddruck-Dreieck PGN ergiebt sich, wie vorher.

Wählt man auf der Wandfläche einen anderen Punkt an Stelle von A, so entsteht eine mit Fig. 260 völlig ähnliche Figur. Bei ebener Oberfläche BE sind demnach die Gleitebenen für alle Stellen der Wand mit einander parallel; die Fläche des Dreiecks PGN ist mit AB^2 proportional, der Erddruck also von der Form $D = \frac{1}{2} kh^2$. Hiernach ist die Darstellung der Vertheilung des Druckes über die Wandhöhe ein Dreieck, dessen Grundlinie kh man erhält, indem man PGN in ein Dreieck von der Höhe h verwandelt.

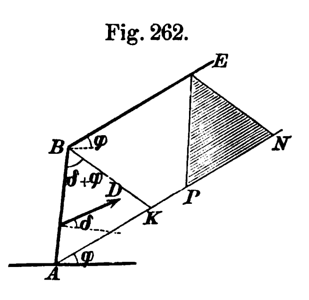
Ist der Punkt E für die Zeichnung nicht verwendbar (Fig. 261), so zieht man durch K eine Parallele KK_1 zu BE und kann nun den Halbkreis über AB zeichnen und $K_1 R_1 \perp AB$ legen; dann ist $\overline{AR_1}^2 = AB \cdot AK_1$. Macht man daher $AN_1 = \overline{AR_1}$, so sind die Strecken zwischen den Punkten A, K_1, N_1 und B proportional denen zwischen A, K, N und E, so dass eine Parallele $N_1 N$ zu BE den Punkt N liefert. Bei dieser Vergröfserung der proportionalen Theile wachsen aber auch die Fehler, so dass es räthlich ist, zu prüfen, ob auch N und B gleich weit von der Gleitebene AG abstehen.

Fig. 261.



Hat die Oberfläche die natürliche Böschung φ (Fig. 262), so fällt E (Fig. 260) in unendliche Ferne, und es wird auch $AN = \infty$, mithin auch $BG = \infty$. Die Gleichfläche ist also von A nach dem unendlich fernen Punkte der Geraden BE zu ziehen, fällt sonach mit AK zusammen. Das Erddruck-Dreieck würde nun nach dem bisherigen Verfahren in unendliche Ferne rücken, kann aber, weil GN und BK jetzt zwischen Parallelen liegen, also gleich sind, an jeder beliebigen Stelle zwischen diesen Parallelen gezeichnet werden (Fig. 262).

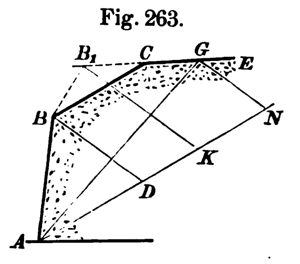
Fig. 262.



Ist der Querschnitt des durch die Gleitebene abzutrennenden Erdprismas nicht ein Dreieck, sondern ein Viereck (Fig. 263), so kann man, weil es (Fig. 259) nur auf die Gröfse, nicht auf die Form der Fläche ABG ankommt, das Dreieck ABC (in Fig. 263) in ein solches AB_1C verwandeln, dessen Spitze B_1 auf

der Verlängerung von EC liegt. Damit nun $AB_1G = AGN$ werde, hat man durch B_1 eine Parallele B_1K zur Stellungslinie BD zu ziehen und nun den Punkt K wie in Fig. 260 zu benutzen. In diesem Falle findet die auf S. 297 besprochene Gleichheit der Verhältnisse bei anderer Wahl des Punktes A auf der Wandfläche nicht mehr statt, und es ist **nicht** mehr $D = \frac{1}{2}kh^2$ (vgl. S. 291).

Fig. 263.



Einfluss einer Belastung der Oberfläche. Für den Grenzzustand der Ruhe des Erdkörpers ABG (Fig. 264) gilt nach dem Kräftedreieck in Fig. 259 (S. 294) die Gleichung

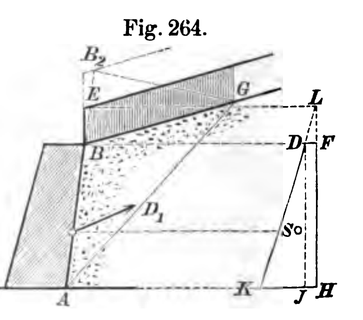
$$D = Q \frac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin(\alpha + \delta + \varphi - \vartheta)}.$$

Q bedeutet darin das Gewicht des Erdkörpers ABG, und die Gleitebene AG ist bestimmt durch die Bedingung $dD : d\vartheta = 0$. Berücksichtigt man aber auch die gleichmäfsige Belastung der ebenen Oberfläche, so kommt statt

$$Q = \gamma\, ABG \text{ nun } Q_1 = \gamma\, AB_2G$$

in Frage, wobei der Punkt B_2 in der auf S. 276 behandelten Weise zu finden ist. Es wird also

Fig. 264.



$$Q_1 = Q\frac{AB_2}{AB} = Q\left(1 + \frac{BB_2}{AB}\right),$$

d. h. das Verhältnis $Q_1 : Q$ ist von ϑ unabhängig, und D muss in demselben Verhältnisse wachsen. Daraus folgt, dass die Neigung ϑ der Gleitebene durch das Hinzukommen der Belastung sich nicht ändert, vielmehr ganz so ermittelt werden kann wie ohne Belastung. Ist mithin ohne Belastung $D = \frac{1}{2}kh^2$, so wird mit derselben

$$D_1 = D\left(1 + \frac{BB_2}{AB}\right) = D\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right) = \tfrac{1}{2}kh(h + \Delta h),$$

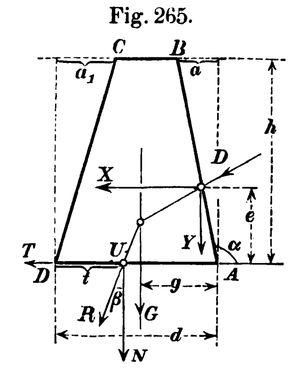
wenn
$$\Delta h = \frac{2q}{\gamma}\,\frac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Vertauscht man h mit z, so ergiebt sich $D_z = {}^1/_2\, k z (z + \Delta h)$ und $\frac{dD}{dz} = p = k (z + {}^1/_2\, \Delta h)$. Die Darstellung davon ist ein Trapez, dessen nicht parallele Seiten sich in der Höhe des Punktes E schneiden, in welchem $B B_2$ die Oberfläche der Belastung trifft. Das Dreieck DJK stellt die Druckvertheilung dar, wenn die Last fehlt; der Einfluss der letzteren wird durch das Hinzukommen des Rechtecks $FDJH$ berücksichtigt. Der Angriffspunkt von D_1 liegt in der Höhe des Trapez-Schwerpunktes S, also **oberhalb** des unteren Drittels der Wand.

VI. Berechnung der Stützmauern.

Für die Standsicherheit der Stützmauer ist mafsgebend, dass in den Fugen weder ein Abgleiten noch ein Ueberschreiten der zulässigen Druckspannung vorkomme. In den meisten Fällen ist die unterste Fuge des freistehenden Theiles der Mauer die am meisten gefährdete; diese möge daher betrachtet werden; doch gilt das Rechnungsverfahren auch für jede höher liegende Fuge. Die Richtung der Fugen ist einstweilen wagerecht gedacht (Fig. 265).

Fig. 265.



Der Erddruck D möge nach dem Vorhergehenden vollständig ermittelt sein und von der Normalen zur Wandfläche um den vollen Reibungswiderstand φ abweichen. Mit ihm setzt sich das Gewicht G der Mauer, dessen Richtungslinie in dem Abstande g an A vorbeigehen möge, zu der Mittelkraft R zusammen. Letztere schneide die Fuge in dem Punkte U mit dem Abstande t von der Aufsenkante D und bilde mit der Lothrechten den Winkel β.

Zerlegt man D in wagerechte und lothrechte Seitenkräfte X und Y, so ist, wenn α den (in der Figur stumpfen) Neigungswinkel der Wand bedeutet,

$$X = D \sin (\alpha + \varphi) \quad \text{und} \quad Y = -D \cos (\alpha + \varphi)$$

(weil D mit der Lothrechten den Winkel $\alpha + \varphi$ bildet). Die

wagerechte Seitenkraft von R ist dann $T = X = D \sin(\alpha + \varphi)$, die lothrechte $N = G + Y = G - D \cos(\alpha + \varphi)$ und

$$1) \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{T}{N} = \frac{D \sin(\alpha + \varphi)}{G - D \cos(\alpha + \varphi)}.$$

Die Lage des Spannungsmittelpunktes U der Fuge findet man mittels der Momentengleichung in Bezug auf A. Das Moment von R ist gleichbedeutend mit dem von N, nämlich $N(d - t)$, das Moment von D gleichwerthig mit dem der normalen Seitenkraft gegen die Wandfläche, nämlich $D \cos \varphi \cdot \frac{e}{\sin \alpha}$. Daher wird $N(d - t) = D \cos \varphi \frac{e}{\sin \alpha} + G g$ oder

$$2) \qquad d - t = \frac{G g + D e \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha}}{G - D \cos(\alpha + \varphi)}.$$

Legt man einen trapezförmigen Mauerquerschnitt zu Grunde, wobei a und a_1 die Grundrisse der Seiten AB und CD sind, so kann das Trapez als Unterschied des vollen Rechtecks dh und der Dreiecke $1/2\, a h$ und $1/2\, a_1 h$ betrachtet werden, so dass

$$G = 1/2\, \gamma_1 h (2d - a - a_1) \quad \text{und}$$

$$G g = 1/2\, \gamma_1 h (d^2 - 1/3\, a^2 - a_1 [d - 1/3\, a_1])$$
$$= 1/2\, \gamma_1 h (d^2 - a_1 d + 1/3\, [a_1^2 - a^2]),$$

wenn γ_1 die Dichte des Mauerwerkes. Hiernach wird aus Gl. 1 und 2:

$$3) \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{D \sin(\alpha + \varphi)}{1/2\, \gamma_1 h (2d - a - a_1) - D \cos(\alpha + \varphi)}$$

$$4) \qquad d - t = \frac{\gamma_1 \frac{h}{2} (d^2 - a_1 d + 1/3\, [a_1^2 - a^2]) + D e \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha}}{1/2\, \gamma_1 h (2d - a - a_1) - D \cos(\alpha + \varphi)}.$$

Die Gefahr des Gleitens ist meist nicht maſsgebend für die Sicherheit der Mauer, weil man ihr leicht durch Neigung der Fugen entgegen wirken kann; bestimmend ist vielmehr die Lage des Spannungsmittelpunktes U und die Gröſse des Normaldruckes N, aus welchen dann die Vertheilung der Normalspannungen sich ergiebt. Es ist meistens nicht erforderlich, dass der Punkt U innerhalb des Kernes, also des mittleren Drittels der Fuge, bleibe; die stärkste Druckspannung σ'' bei D erreicht den zu-

lässigen Werth häufig erst, wenn U aufserhalb des mittleren Drittels liegt. Dann ist für σ'' die Formel

$$5)\qquad \sigma'' = \frac{2}{3}\frac{N}{t} = \frac{2}{3}\,\frac{G - D\cos(\alpha+\varphi)}{t}$$

(vgl. S. 156) zu benutzen.

Man könnte nun für σ'' den zulässigen Werth setzen, Gl. 5 mit Gl. 4 verbinden und daraus d berechnen; dann würde sich aber eine sehr lange, unbequeme Formel ergeben. Zweckmäfsiger ist es, vorläufig die Bedingung zu stellen, dass der Spannungsmittelpunkt gerade an der Grenze des mittleren Drittels liege, damit ein Oeffnen der Fuge noch eben vermieden werde; hiernach bestimmt man die Mauerstärke einstweilen, prüft dann mittels Gl. 3 und 5 die Sicherheit gegen Gleiten sowie die stärkste Spannung und verändert darnach nöthigenfalls noch die Breite d.

Setzt man nach diesen Erwägungen $d - t = {}^2/_3\, d$ in Gl. 4 ein, so erhält man eine nach d quadratische Gleichung

$$6)\ d^2 + 2d\left(\frac{a_1}{2} - a - \frac{2D\cos(\alpha+\varphi)}{\gamma_1 h}\right) = a_1^2 - a^2 + \frac{6De\cos\varphi}{\gamma_1 h \sin\alpha}.$$

Beispiel: Eine Stützmauer kehre einem überhöhten Erdkörper eine lothrechte Fläche zu (es sei $\alpha = 90^0$, $a = 0$). Der Reibungswinkel φ des Erdreiches betrage 30^0. Mauerhöhe und Ueberhöhung h_1 seien beide gleich 5^m und der äufsere Anlauf a_1 der Mauer ${}^1/_5\, h = 1^m$ (Fig. 266).

Dann ist nach der Tabelle auf S. 293

$D = {}^1/_2\,\gamma \cdot 0{,}608\, h^2$; $\cos(\alpha+\varphi) = -\sin 30^0 = -0{,}5$; $\sin(\alpha+\varphi) = \cos\varphi = 0{,}866$.

Nach Gl. 6 wird, wenn man $e = {}^1/_3\, h$ setzt (vgl. S. 293),

$$d^2 + 2d\left(\frac{h}{10} + \frac{2\cdot 0{,}608\,\gamma\, h^2 \cdot 0{,}5}{2\gamma_1 h}\right) = \frac{h^2}{25} + \frac{2\cdot 0{,}608\,\gamma\, h^2\cdot 0{,}866}{2\gamma_1} \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 2\frac{d}{h}\left(0{,}1 + 0{,}304\frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = 0{,}04 + 0{,}525\,\frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Es möge 1^{cbm} Erde $\gamma = 1600^{kg}$ wiegen; eine Mauer aus Ziegeln ist etwa ebenso schwer, so dass dann $\gamma : \gamma_1 = 1$; für Bruchstein-Mauerwerk kann $\gamma_1 = 2000$, also $\gamma : \gamma_1 = 0{,}8$ gesetzt werden. Die Annahme

$$\gamma = \gamma_1 \text{ liefert } d = 0{,}449\, h,$$
$$\gamma = 0{,}8\,\gamma_1 \text{ aber } d = 0{,}417\, h.$$

(Das Gewicht G der dichteren Bruchsteinmauer liefert mit D eine Mittel-

kraft R, die mehr nach rechts liegt, also einer günstigeren Lage des Spannungsmittelpunktes U entspricht und deshalb eine geringere Mauerdicke d erfordert.) Wählen wir hiernach Bruchstein, so wird

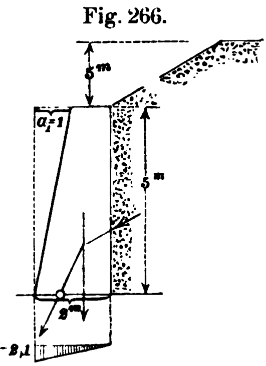


Fig. 266.

$$d = 0{,}417 \cdot 5 = 2{,}085\ ^{\mathrm{m}}$$

oder rund 2 m; die obere Breite beträgt dann 1 m. Bei dieser Stärke geht R ungefähr durch die Grenze des Kernes. Es wird

$$G = 1{,}5\ \gamma_1\, h = 7{,}5\ \gamma_1\,;$$

$$D \sin(\alpha + \varphi) = {}^1/_2\, \gamma\, h^2 \cdot 0{,}608 \cdot 0{,}866 = 6{,}58\ \gamma\,;$$

$$D \cos(\alpha + \varphi) = -\,{}^1/_2\, \gamma\, h^2 \cdot 0{,}608 \cdot 0{,}5 = -\,3{,}5\ \gamma\,;$$

daher (Gl. 1) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{6{,}58\ \gamma}{7{,}5\ \gamma_1 + 3{,}5\ \gamma}$ = etwa 0,5, d. h. $\beta = 27^0$. Dieser Winkel ist angemessen, da man bei Mauerwerk 27 bis 30⁰ als Abweichung zulässt. Weil hier t annähernd $= {}^1/_3\, d$, so wird die stärkste Spannung

$$\sigma'' = 2 \cdot \frac{7{,}5\ \gamma_1 + 3{,}5\ \gamma}{d} = 10{,}3\ \gamma_1\,.$$

Eine Druckspannung, als n-faches von der Dichtigkeit des betr. Körpers dargestellt, bedeutet offenbar diejenige gleichmäfsige Spannung, welche in einer Säule von n Meter Höhe durch das eigene Gewicht an der Grundfläche entsteht, und es kann n die Spannungshöhe genannt werden; hier also 10,3 m. Führt man $\gamma_1 = 2000$ ein, so ergiebt sich $\sigma'' = 20600$; dies bedeutet hier Kilogramme f. d. qm, weil alle Mafse in Metern eingeführt wurden. Gleichbedeutend damit ist $\sigma'' = 2{,}06\ ^{\mathrm{at}}$.

Die Anstrengung des Mauerwerks ist hiernach (auch für Bruchsteine) eine sehr geringe, während die Sicherheit gegen Gleiten den Anforderungen etwa entspricht. Wenn man aber die Fugen schräg stellt und dadurch die Gefahr des Gleitens vermindert, so könnte man die Mauer wohl schwächer halten. Stellt man die Fugen rechtwinklig zur Aufsenfläche, so bekommen sie etwa 11½⁰ Neigung, und die Richtung von R nähert sich dadurch um diesen Winkel der Normalen zur Fuge. Wir wollen daher versuchsweise $d = 1{,}6\ ^{\mathrm{m}}$ wählen (Fig. 267) und $\operatorname{tg}\beta$ nebst σ'' berechnen.

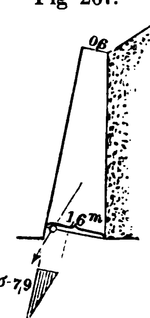


Fig. 267.

Die obigen, für wagerechte Fugen abgeleiteten Gleichungen können wir auch jetzt beibehalten, weil

$$\cos 11\,{}^1/_2{}^0 = 0{,}98$$

nur wenig von der Einheit abweicht.

Es ist jetzt $G = 5{,}5\ \gamma_1$; nach Gl. 4 wird

$$d - t = \frac{{}^1/_2\, \gamma_1\, 5\,(1{,}6^2 - 1{,}6 + {}^1/_3) + 7{,}6\ \gamma \cdot {}^5/_3 \cdot 0{,}866}{5{,}5\ \gamma_1 + 3{,}5\ \gamma} = 1{,}44\ ^{\mathrm{m}}.$$

Der Abstand des Spannungsmittelpunktes von der Aufsenkante beträgt nur $t = 1{,}6 - 1{,}44 = 0{,}16^{\,m}$, die wirksame Fugenbreite $3\,t = 0{,}48^{\,m}$, und auf $1{,}6 - 0{,}48 = 1{,}12^{\,m}$ Breite ist die Fuge unwirksam (öffnet sich).

Nach Gl. 1 wird

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{6{,}58\,\gamma}{5{,}5\,\gamma_1 + 3{,}5\,\gamma} = 0{,}63;\quad \beta = 32^{\,0};$$

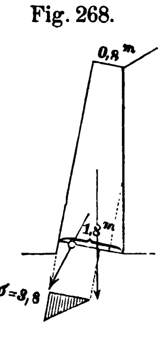
dies ist nicht zu viel, weil es wegen der Neigung der Fuge nur einer Abweichung um $32 - 11\,^1/_2 = 20\,^1/_2{}^0$ von der Normalen entspricht.

Die stärkste Spannung wird

$$\sigma'' = \frac{2}{3}\,\frac{5{,}5\,\gamma_1 + 3{,}5\,\gamma}{0{,}16} = 34{,}6\,\gamma_1 = 79200$$

oder $7{,}92^{\,at}$. Dies ist beinahe 4 Mal so viel wie im vorigen Falle; der jetzt vorliegende Mauerquerschnitt ist aber besonders deshalb unbrauchbar, weil der Spannungsmittelpunkt der Aufsenkante zu nahe liegt; eine nur geringe Vergröfserung des Erddruckes und eine daraus folgende nur geringe Verschiebung jenes Punktes würde die Spannung sehr bedeutend vergröfsern können (s. S. 156).

Fig. 268.



Wählt man aber $d = 1{,}8^{\,m}$ (Fig. 268), so wird $G = 6{,}5\,\gamma_1$; man erhält dann $t = 0{,}33^{\,m}$; $3\,t = 0{,}99^{\,m}$; auf $0{,}81^{\,m}$ Breite ist die Fuge unwirksam. Ferner ist $\operatorname{tg}\beta = 0{,}566$ also $\beta = 29^1/_2{}^0$; $\sigma'' = 18{,}8\,\gamma_1 = 37\,600\ ^{kg}/_{qm} = 3{,}76^{\,at}$. (Es ist bemerkenswerth, dass jetzt die Spannung noch nicht halb so grofs ist wie im vorigen Falle.) Diese Mauer dürfte zur Ausführung geeignet sein; doch kann man das unwirksame Stück derselben zum Theil fortlassen (etwa rechts von der punktirten Linie), was dann freilich eine neue Ermittelung des Erddruckes auf die abgeänderte Wandfläche bedingen würde.

VII. Spannungen in einem Punkte eines Erdkörpers.

Die auf S. 3 und ff. entwickelten allgemeinen Beziehungen zwischen den Kräften an einem Theilchen eines Körpers gelten auch für Erdkörper, soweit die sich ergebenden Spannungen mit der Beschaffenheit einer Erdmasse verträglich sind. Das auf S. 7 erläuterte Spannungs-Ellipsoid wird daher auch für Erde benutzt werden können.

Es soll hier nur der einfachere Fall behandelt werden, wo der Erdkörper durch Cylinderflächen begrenzt ist, deren Erzeugende rechtwinklig zur lothrechten Bildebene stehen; auch möge sich der Erdkörper zu beiden Seiten der Bildebene weit genug erstrecken, so dass diese als eine Symmetrie-Ebene für den Körper angesehen werden kann. Dann muss die Spannung an jeder zur Bildebene rechtwinkligen Schnittfläche mit der Bildebene parallel sein. Lässt man daher die Schnittebene sich nicht um einen Punkt P, sondern

um eine durch P gelegte Winkelrechte zur Bildebene drehen, so werden die entsprechenden Spannungen p sämmtlich in der Zeichenebene liegen und die Mittelpunkts-Strahlen der Spannungs-Ellipse bilden.

Diese Spannungen p stehen im Allgemeinen schief zu den betreffenden Schnittebenen; nur die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sind reine Normalspannungen und stellen zugleich gröfste und kleinste Spannung für alle durch die Achse P zu legenden Ebenen dar. (Die gröfsere der beiden Hauptspannungen, dem Zahlenwerthe nach, soll stets σ_1 sein.)

Wir setzen zunächst voraus, dass (Fig. 269) die Hauptspannungen bei P, nämlich $PA = \sigma_1$ und $PB = \sigma_2$, nach Richtung und Gröfse gegeben seien, u. zw. als Druckspannungen; dann soll die Spannung p an einer Schnittebene EP, die mit der Richtung σ_1 den Winkel α bildet, nach Gröfse und Richtung bestimmt werden. Schneidet man ein unendlich kleines Prisma PRS (von der Länge $= 1$ rechtwinklig zur Bildebene) aus dem Erdkörper heraus, dessen Fläche PS in der Ebene EP liegt, während PR und RS die Richtungen der Hauptspannungen haben, so müssen an diesem Prisma die Flächenkräfte einander das Gleichgewichte halten. Ist $PS = ds$, so wird

$$PR = ds \cos \alpha, \quad RS = ds \sin \alpha.$$

Fig. 269.

An PR wirkt nun eine Normalspannung σ_2, daher eine Druckkraft $\sigma_2\, ds \cos \alpha$, an RS eine Druckkraft $\sigma_1\, ds \sin \alpha$. Mit beiden muss die schiefe Druckkraft $p\, ds$ an PS im Gleichgewichte sein. In dem Verhältnisse der Spannungen wird nichts geändert, wenn man den gemeinsamen Factor ds fortlässt, so dass p mit $\sigma_2 \cos \alpha$ und $\sigma_1 \sin \alpha$ im Gleichgewichte sein, also ein geschlossenes Kräftedreieck bilden muss. ($\sigma_1 \sin \alpha$ und $\sigma_2 \cos \alpha$ sind die rechtwinkligen Abstände der Punkte A und B von EP, daher leicht abzugreifen.) Durch das Kräftedreieck ist p nach Gröfse und Richtung völlig bestimmt und kann leicht als PQ an den Punkt P parallel verschoben werden. Aus dem Dreieck ergiebt sich noch

$$1) \qquad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sigma_2 \cos \alpha}{\sigma_1 \sin \alpha} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Für $\alpha = 0$ ist $\lambda = 90^0$, für $\alpha = 90^0$ ist $\lambda = 0$. Nur in diesen beiden Fällen steht p rechtwinklig auf der Schnittebene, ist $\alpha + \lambda = 90^0$. Liegt α zwischen 0 und 90^0, so ist $\alpha + \lambda$ ein spitzer Winkel; denn man findet

$$\operatorname{tg}(\alpha + \lambda) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\lambda}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\lambda},$$

oder nach Gl. 1:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \lambda) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \operatorname{tg}\alpha}}{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}, \tag{2}$$

was für einen positiven, endlichen Werth von $\operatorname{tg}\alpha$ (und für $\sigma_1 > \sigma_2$) auch stets positiv und endlich ist (während für einen stumpfen Winkel $\alpha + \lambda$ die Tangente negativ sein müsste).

Die Richtung PQ der Spannung p weicht von der Normalen PN der Schnittebene um einen Winkel δ ab, dessen Gröfse sich daraus ergiebt, dass $\alpha + \lambda + \delta = 90^0$ sein muss; es wird darnach $\delta = 90^0 - (\alpha + \lambda)$, mithin

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \lambda)}.$$

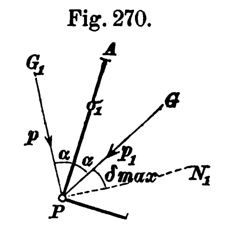
Die Abweichung δ wird am gröfsten für denjenigen Neigungswinkel α der Schnittebene, welcher $\operatorname{tg}(\alpha + \lambda)$ oder in Gl. 2 den Zähler zu einem Minimum macht. Setzt man die Abgeleitete dieses Zählers (nach α), nämlich $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \sin^2\alpha} = 0$, so entsteht

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \tag{3}$$

und hiernach

$$\operatorname{tg}\delta_{max} = \pm \frac{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{2\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}. \tag{4}$$

Fig. 270.



Zu den beiden Winkeln α nach Gl. 3 gehört dann je ein Winkel λ, für den Gl. 1 $\operatorname{tg}\lambda = \pm\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$ ergiebt, so dass für diejenigen beiden Schnittebenen PG und PG_1 (Fig. 270), deren Spannungen p am stärksten von der Normalen abweichen, $\lambda = \alpha$ wird. Diese Schnittebenen liegen symmetrisch zur Richtung der

ersten Hauptspannung σ_1; die Spannung der einen Ebene fällt in die Richtung der anderen, und umgekehrt.

Bedingungen für den Grenzzustand der Ruhe eines Erdkörpers ohne Scherfestigkeit. In einem solchen Erdkörper kann vermöge der Reibung der Druck p höchstens um den Reibungswinkel φ von der Normalen abweichen. Ist nun in irgend einem Punkte P

$$\delta_{max} = \varphi ,$$

so befindet sich der Körper im Grenzzustande der Ruhe, und diejenigen beiden Flächen, für welche $\delta = \varphi$ wird, sind die Gleitflächen dieses Punktes. Da nach Fig. 270 der Winkel $G_1 P N_1 = 2\alpha + \delta_{max} = 2\alpha + \varphi = 90^0$, so wird für die Gleitflächen

5) $$\alpha = {}^1/_2\,(90^0 - \varphi)$$

Um diesen Winkel weicht jede der beiden Gleitebenen von der ersten Hauptspannung ab. Sodann giebt Gl. 3: $\sigma_2 : \sigma_1 = \mathrm{tg}^2\,\alpha$ oder

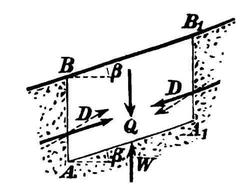
6) $$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \mathrm{tg}^2\,\frac{90^0 - \varphi}{2} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\,.$$

Im Grenzzustande der Ruhe haben also die beiden Hauptspannungen dieses bestimmte Verhältnis. (Für $\varphi = 30^0$ schließen die beiden Gleitebenen einen Winkel $2\alpha = 60^0$ ein, in dessen Mitte σ_1 liegt; es ist dann $\sigma_2 : \sigma_1 = {}^1/_3$.)

VIII. Spannungen in einem unbegrenzten Erdkörper mit ebener Oberfläche.

Ist β die Neigung der oberen Begrenzungsebene gegen die Wagerechte und legt man durch den Erdkörper die lothrechten parallelen Schnitte AB und A_1B_1, sowie den Schnitt AA_1 parallel der Oberfläche (Fig. 271), so wirkt auf den Körper ABB_1A_1 als Massenkraft die Schwere. Die Spannkräfte D an den lothrechten Ebenen müssen (wegen der gleichartigen Zustände in dem seitlich unbegrenzten Erdkörper) gleich und entgegengesetzt gerichtet sein und in gleichen Tiefen unter der Oberfläche angreifen; sie mögen etwa die punktirten Richtungen haben. Der Widerstand W der Ebene AA_1 muss dem Gewichte Q gleich und entgegengesetzt sein

Fig. 271.

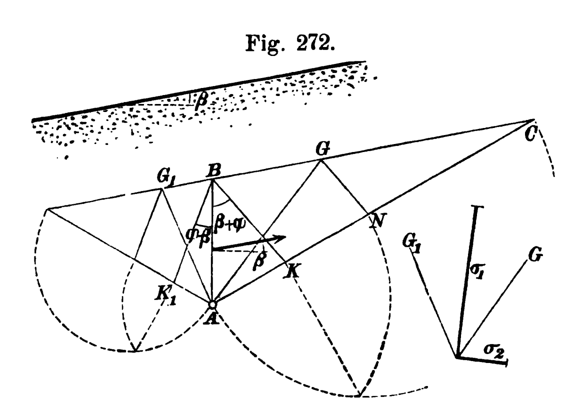


(nach der Gleichung der wagerechten und lothrechten Kräfte), muss sich aber auch (des gleichartigen Zustandes wegen) gleichmäfsig über AA_1 vertheilen, daher in die Mitte von AA_1 fallen und sich mit Q völlig aufheben. Daraus folgt dann weiter, dass auch die beiden D nicht ein Kräftepaar bilden können, sondern in dieselbe Richtungslinie fallen, d. h. der Oberfläche parallel sein müssen (wie die voll ausgezogenen Richtungen in der Figur darstellen). Die Richtung der Oberfläche und die Lothrechte sind also in der Weise mit einander gepaart, dass die Spannungen an **lothrechten** Ebenen parallel der Oberfläche, die Spannungen an den mit **der Oberfläche parallelen** Ebenen aber lothrecht sind.

Dieser Satz gestattet die Anwendung des Rebhann'schen Verfahrens (S. 294) auf die Ermittelung der Gleitflächen eines Punktes A für den unteren Grenzzustand der Ruhe.

AB sei eine kleine lothrechte Schnittfläche im Erdkörper (Fig. 272), an welche sich BC parallel der Oberfläche anschliefst. Der an AB auftretende Druck schliefst mit der Wagerechten (der Normalen zur Schnittebene) den Winkel β ein. Der auf BC lastende Druck der oberen Erdmasse kann als eine gleichmäfsig vertheilte Last angesehen werden, welche nach S. 298 keinen Einfluss auf die Neigung der Gleitebene hat, so dass man bei Bestimmung der letzteren BC als freie Oberfläche behandeln kann. An Stelle des auf S. 296 benutzten Winkels δ tritt hier β, und die Stellungslinie BK muss von AB um $\beta + \varphi$ abweichen*). Man findet nun den Punkt N in bekannter Weise, zieht $NG \# BK$ und hat damit eine Gleitfläche AG gefunden. Die zweite Gleit-

Fig. 272.



*) Müller-Breslau, Elemente der graphischen Statik, 1. Aufl., S. 78.

fläche AG_1 ergiebt sich, wenn man den Erdkörper links von AB betrachtet und dasselbe Verfahren anwendet; nur ist dabei zu bedenken, dass man den Winkel β jetzt negativ setzen muss, oder dass die Stellungslinie BK_1 mit AB den Winkel $\varphi - \beta$ einschliefst. Zur Prüfung der Richtigkeit kann dienen, dass die beiden Gleitflächen um $90^0 - \varphi$ von einander abweichen müssen. Die Richtung der ersten Hauptspannung σ_1 halbirt diesen Winkel.

Die Neigungen der Gleitflächen hängen nur von β und φ ab, sind von der Lage des Punktes A unabhängig; im seitlich unbegrenzten Erdkörper mit ebener Oberfläche sind daher die Gleitflächen Ebenen.

Man kann nun auch die Gröfse des Druckes D an einer lothrechten Ebene bestimmen (Fig. 273), indem man die Schnittebene AB bis zur Oberfläche reichen lässt und nach gefundener Gleitfläche das Druckdreieck PGN zeichnet. Da bei einer Veränderung der Höhe $AB = h$ die Figur sich ähnlich bleibt, so ist die Dreiecksfläche PGN proportional mit h^2 und $D = {}^1/_2\, k h^2$ zu setzen. Verwandelt man PGN in ein Dreieck von der Höhe h, so ist dies die Druckvertheilungsfigur für AB.

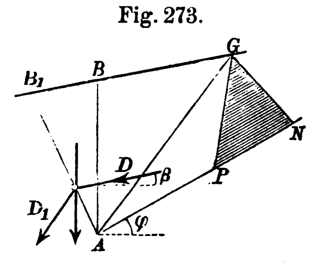


Fig. 273.

Nach Ermittelung des Druckes auf die lothrechte Ebene AB kann man nun auch den Druck D_1 gegen eine beliebig geneigte Ebene AB_1 bestimmen, denn das Gleichgewicht der Kräfte an dem Körper ABB_1 erfordert, dass D_1 die Mittelkraft sei aus D und dem Gewichte G von ABB_1. Dieser Druck D_1 geht durch den unteren Drittelspunkt von AB_1, ist daher auch von der Form $D_1 = {}^1/_2\, k_1 h^2$.

Hiernach kann man leicht für jede Schnittebene im unbegrenzten Erdkörper mit ebener Oberfläche die Druckvertheilung für den unteren Grenzzustand der Ruhe ermitteln.

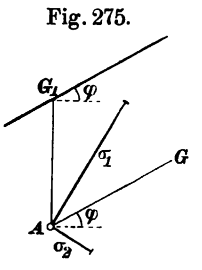
Fig. 274.

Bei wagerechter Oberfläche sind (nach dem Satze auf S. 307) die Spannungen an lothrechten und wagerechten Schnitten Normalspannungen (Fig. 274): Auf diesen Fall finden die Untersuchungen von S. 279 Anwendung, bei denen an einer lothrechten

Ebene ein reiner Normaldruck vorausgesetzt war. Die dort gefundene, als eben angenommene Gleitfläche, welche mit der Wagerechten den Winkel $^1/_2\,(90^0 + \varphi)$, mit der Lothrechten den Winkel $^1/_2\,(90^0 - \varphi)$ bildete, findet jetzt ihre Bestätigung; die zweite Gleitebene liegt symmetrisch, und beide schliefsen den Winkel $90^0 - \varphi$ ein (wie es nach S. 306 sein muss). In einer Tiefe y unter der Oberfläche ist die lothrechte Hauptspannung $\sigma_1 = \gamma y$, die wagerechte (nach S. 280 und 281) $\sigma_2 = ky = \gamma\, \mathrm{tg}^2 (45^0 - {}^1/_2\,\varphi) \cdot y$. (Für $\varphi = 30^0$ ist $\sigma_1 = \gamma y$, $\sigma_2 = {}^1/_3\,\gamma y$.) Das Verhältnis $\sigma_2 : \sigma_1$ stimmt mit Gl. 6, S. 306 überein.

Ist die Oberfläche unter dem natürlichen Böschungswinkel φ geneigt (Fig. 275) so weicht der Druck an lothrechter Schnittebene, weil er mit der Oberfläche parallel, um φ von der Normalen ab. Die lothrechte Ebene ist daher eine Gleitfläche. Die zweite Gleitfläche eines Punktes A liegt parallel der Oberfläche, weil der an solcher Schnittebene auftretende lothrechte Druck auch den Winkel $90^0 - \varphi$ mit der Ebene bildet. Die Richtung der Hauptspannung σ_1 ist daher gegen die Lothrechte um $45^0 - {}^1/_2\,\varphi$ geneigt. Während sich also die Oberfläche von der Wagerechten aus um den Winkel φ links herum dreht, erfahren die Richtungen der Hauptspannungen und der Gleitflächen eine gemeinsame Drehung rechts herum, u. zw. um den Winkel $45^0 - {}^1/_2\,\varphi$.

Fig. 275.



Bei der Aufsuchung des Erddrucks eines unbegrenzt überhöhten Erdkörpers gegen eine lothrechte Wand (S. 289) war die Wand selbst als eine Gleitfläche angenommen, weil man an ihr den vollen Reibungswiderstand voraussetzte; die zweite ergab sich parallel der natürlichen Böschung. Diese Verhältnisse stimmen mit denen am unbegrenzten Erdkörper überein, so dass die dort gemachte Annahme einer ebenen Gleitfläche einleuchtend erscheint. Die auf S. 290 gefundene Gröfse des Erddrucks $D = {}^1/_2\,\gamma\, h^2 \cos \varphi$ wird daher für den unbegrenzten Erdkörper ebenfalls richtig sein.

Für den oberen Grenzzustand der Ruhe lassen sich in entsprechender Weise die Gleitflächen finden, wenn man das, in sinngemäfser Weise für den passiven Erddruck abgeänderte, Rebhann'sche Verfahren anwendet. Die Gleitflächen haben dann im Allgemeinen andere Richtungen. Von der ersten Hauptspannung σ_1 weichen sie wieder je um $45^0 - {}^1/_2\,\varphi$ ab; während aber bei wagerechter Oberfläche im unteren Grenzzustande die erste Haupt-

spannung σ_1 lothrecht, die zweite σ_2 wagerecht war, tritt für den oberen Grenzzustand das Entgegengesetzte ein, so dass σ_1 wagerecht, σ_2 lothrecht steht. Bei einer Drehung der Oberfläche dreht sich die Richtung von σ_1 in dem gleichen Sinne. — Für $\beta = \varphi$ (Fig. 275) ist nur eine Stellung der Gleitflächen, also auch nur ein Gleichgewichtszustand möglich; die beiden Grenzzustände fallen zusammen. *)

IX. Richtung des Erddruckes gegen eine feste Wand.

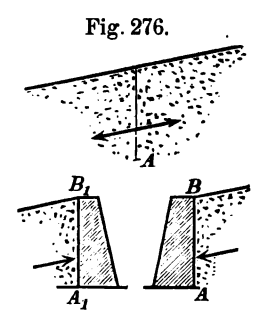
In den Untersuchungen S. 285—293 wurde die Voraussetzung gemacht, dass an der Wand der volle Reibungswiderstand zur Wirkung komme. Dies führt in Verbindung mit der allgemein (von S. 274 bis 299) gemachten Annahme einer ebenen Gleitfläche in den meisten Fällen auf Widersprüche. Benutzt man für die Wand denselben Reibungswinkel φ wie für das Innere des Erdkörpers, so bedeutet die erstere Voraussetzung das Zusammenfallen einer Gleitfläche des Erdkörpers mit der Wand. Dann verlangt aber Gl. 5, S. 306, dass die zweite Gleitfläche des Fufspunktes A der Wand von der ersten Gleitfläche, also der Wandebene, um $90^0 - \varphi$ abweiche. Die Bestimmung der im Erdkörper gelegenen Gleitfläche nach Gl. 7, S. 287 führt dagegen im Allgemeinen auf einen anderen Winkel. Für $\varphi = 30^0$ wird $90^0 - \varphi = 60^0$. Bei $h_1 = 0$, $\alpha = 90^0$ und $\varphi = 30^0$ liefert Gl. 9, S. 288, $\vartheta = 54^0 20'$, während die Gleitfläche im Punkte A nur $90^0 - 60^0 = 30^0$ Neigung gegen die Wagerechte haben dürfte, wenn die Wand eine Gleitfläche ist, wogegen im unbegrenzten Erdkörper mit wagerechter Oberfläche der Neigungswinkel der Gleitebenen $45^0 + {}^1/_2\, \varphi = 60^0$ beträgt. — Bei $h_1 = \infty$ liefert Gl. 13, S. 289 unabhängig von α für ϑ den Werth φ, so dass die beiden Gleitflächen um $\alpha - \varphi$ (anstatt um $90^0 - \varphi$) gegen einander geneigt wären; im unbegrenzten Erdkörper würde $\vartheta = \varphi$ richtig sein.

Hieraus kann man schliefsen, dass, wenn an der Wand die volle Reibung wirkt, die andere Gleitfläche durch A im Allgemeinen eine krumme Fläche sein muss, welche bei A mit der Wand den Winkel $90^0 - \varphi$ bildet, bei weiterem Verlaufe aber sich der entsprechenden Gleitebene des unbegrenzten Erdkörpers mehr und mehr nähert. Mit einer solchen krummen Gleitfläche zu rechnen, würde aber sehr schwierig sein.

*) Mohr, Erddruck; Zeitsch. d. Arch.- u. Ing.-Vereins Hannover 1871, S. 357.

Es liegt der Gedanke nahe, die Spannungsverhältnisse des unbegrenzten Erdkörpers auch auf die Berechnung des Druckes gegen eine Stützmauer anzuwenden, indem man die Stützwand (welche den Erdkörper abschliefst) wie eine Schnittebene im unbegrenzten Erdkörper behandelt. Dann sind die Gleitflächen thatsächlich Ebenen, der Druck auf die Wand schliefst dann aber mit der Normalen einen Winkel ein, der sich nach Fig. 273, S. 308 bestimmen lässt; dieser Winkel ist Null, wenn die Wandfläche parallel mit σ_1, er ist gleich φ, wenn die Wand die Neigung einer Gleitfläche hat, und liegt sonst zwischen Null und φ. Diese Uebertragung der Spannungsverhältnisse des unbegrenzten Erdkörpers auf den Druck gegen eine Wand ist aber auch nicht widerspruchsfrei. So z. B. erfährt eine lothrechte Schnittebene (Fig. 276) von beiden Seiten gleiche aber entgegengesetzte Drücke D, doch wird man nicht zugeben können, dass die Stützwand $A_1 B_1$ den gleichen Druck nach Gröfse und Richtung auszuhalten habe wie die Stützenwand AB. Unter gewissen Beschränkungen kann man allerdings wohl den Druck auf Stützmauern aus dem Verhalten des unbegrenzten Erdkörpers entnehmen und das in Fig. 273, S. 308 gezeigte Verfahren zu seiner Ermittelung anwenden*). Man bekommt dann, weil an der Wand nicht der volle Reibungswiderstand zur Anrechnung kommt, gröfsere und ungünstiger gerichtete Drücke, als wenn man nach S. 285—293 rechnet oder das Rebhann'schen Verfahren (S. 294—299) mit $\delta = \varphi$ anwendet.

Fig. 276.



Etwas Gewaltsames hat die Uebertragung der Verhältnisse des unbegrenzten Erdkörpers auf einen durch eine Stützmauer begrenzten immerhin; die Gleichmäfsigkeit und Stetigkeit wird durch die Mauer doch sicherlich gestört. Vielfältige Versuche haben leider noch nicht zu einem sicheren Ergebnisse darüber geführt, in welchem Umfange die Reibung an der Wand zur Wirkung kommt. Eine ganz befriedigende Lösung ist auch in

*) Vgl. a. Dr. Weyrauch, Theorie des Erddruckes auf Grund der neueren Anschauungen; Allgemeine Bauzeitung 1880, S. 63; erschien auch als Sonder-Abdruck, Wien 1881, Verlag von R. v. Waldheim.

einem Falle, wo die Reibung eine so bedeutende Rolle spielt, recht schwierig. Ist der Erdkörper ohne Bindemittel, so kann er durch starke Erschütterungen unter ungünstigen Umständen in einen Zustand gerathen, der von den Bedingungen des aktiven Erddruckes oder des unteren Grenzzustandes der Ruhe sich weit entfernt, so dass dann erheblich höhere Pressungen entstehen können.

Fünfzehnter Abschnitt.

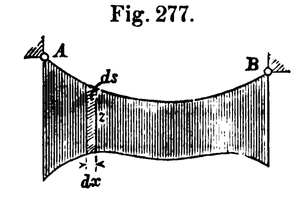
Tonnengewölbe.

I. Grundgleichungen der Kettenlinien und Drucklinien für lothrechte Belastung.

Ist eine vollkommen biegsame Kette an den Endpunkten A und B befestigt und über ihre ganze Länge stetig belastet, so nimmt sie eine gewisse Gleichgewichtslage an, deren Form von der Belastungsart abhängt. Diese Gleichgewichtsform heifst Kettenlinie.

Die Belastung stellen wir uns in der Weise vor (Fig. 277), dass von jedem Längentheilchen ds der Kette, dessen Grundrisslänge gleich dx ist, eine Last $z\,dx$ getragen wird, dann ist z die veränderliche Belastung der Längeneinheit des Grundrisses der Kettenlinie, oder kürzer, die Belastungshöhe. Trägt man die Werthe von z als Längen von der Kettenlinie aus lothrecht nach unten ab, so bilden die Endpunkte dieser Strecken die Belastungslinie, deren Form in einer bestimmten Beziehung zur Kettenlinie stehen muss.

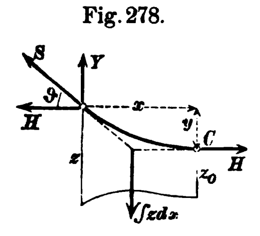
Fig. 277.



Die völlige Biegsamkeit bedeutet, dass die Spannkraft an irgend einer Schnittstelle der Kette stets in die Richtung der Tangente an die Kettenlinie fallen muss. Durchschneidet man die Kette an 2 Punkten, so müssen die Spannkräfte der beiden Schnittstellen den sämmtlichen zwischenliegenden Lasten das Gleichgewicht halten. Die Kette werde in ihrem Scheitelpunkte C (Fig. 278), wo ihre Tangente wagerecht ist, durchschnitten; dann ist bei C eine wagerechte Spannkraft H anzu-

bringen. Wählt man diese Stelle zum Anfangspunkte der Koordinaten, so möge an einem beliebigen Punkte, dessen Koordinaten x und y sind, ein zweiter Schnitt geführt und die hier auftretende Spannkraft S in wagerechte und lothrechte Seitenkräfte zerlegt werden. Da die zwischenliegenden Belastungen nur lothrechte Kräfte darstellen, so muss die wagerechte Seitenkraft gleich der Scheitelspannkraft H, die lothrechte Seitenkraft Y aber gleich der Gesammtlast $\int_0^x z\,dx$ des herausgeschnittenen Kettenstückes sein; d. h.

Fig. 278.



die wagerechte Spannkraft einer nur lothrecht belasteten Kette hat an allen ihren Punkten gleiche Gröfse; die lothrechte Spannkraft an irgend einer Stelle ist gleich der Gesammtlast zwischen dieser Stelle und dem Scheitel.

Für den Neigungswinkel ϑ der Kettenlinie im Punkte x, y gilt

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{Y}{H} = \frac{\int z\,dx}{H}.$$

Vergröfsert sich x um dx, so kommt zu der Last $\int_0^x z\,dx$ der Theil $z\,dx$ hinzu, ist also das Differential der Gesammtlast. Durch Differentiation entsteht daher

$$1)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{z}{H}.$$

Dies ist die Grundgleichung der Kettenlinien mit lothrechter Belastung.

Wichtig ist auch die Gleichung für den Krümmungshalbmesser ρ der Kettenlinien. Aus

$$\rho = \frac{\left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

folgt, weil $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta$ und mit Rücksicht auf Gl. 1:

$$\varrho = \frac{H \sec^3 \vartheta}{z}. \tag{2}$$

Für den Scheitel C sei der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie r, die Belastungshöhe z_0, dann wird, weil dort $\vartheta = 0$ und $\sec \vartheta = 1$, $r = H : z_0$ oder

$$H = r z_0. \tag{3}$$

Die wagerechte Spannkraft H ist demnach gleich dem Krümmungshalbmesser im Scheitel mal der Belastungshöhe daselbst.

Dreht man die Bildebene mit der Kettenlinie um eine wagerechte Achse, so dass der Scheitel C der höchste Punkt wird, behält aber die abwärts gerichtete Belastung bei, so bleiben die obigen Gleichungen gültig; die Spannkräfte der Kette werden dann aber Druckkräfte, und ihr Gleichgewicht wird ein ein unsicheres (labiles); ihre Gleichgewichtsform heifst dann Drucklinie.

Bei überall gleicher Belastungshöhe $z = q$ wird aus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H} + C \text{ und } C = 0$$

und weiter $y = \frac{qx^2}{2H} + C_1$ und $C_1 = 0$, mithin ergiebt sich die bekannte **parabolische Kettenlinie** $x^2 = 2\frac{H}{q}y$ mit dem Parameter $H : q$.

II. Gemeine Kettenlinie.

Unter dieser versteht man diejenige Kettenlinie, welche einer gleichmäfsig über die Bogenlänge derselben vertheilten Belastung entspricht (Fig. 279). Es ist das die Gleichgewichtsform einer Kette oder eines biegsamen Seiles überall gleicher Dicke unter alleiniger Wirkung des eigenen Gewichtes.

Hat die Längeneinheit der Kette ein Gewicht q, so wiegt ein Bogentheilchen $q\,ds$; mit Hülfe von z ausgedrückt, ist aber

dieses Gewicht auch $z\,dx$, so dass $z\,dx = q\,ds$, also die Belastungshöhe an beliebiger Stelle

$$1)\qquad z = q\frac{ds}{dx} = q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Für den Scheitel gilt (weil hier $ds = dx$) $z_0 = q$ und nach Gl. 3 (S. 315) $H = r\,q$, so dass aus der Grundgleichung 1 (S. 314) wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{r}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung $dy:dx = v$, so dass $d^2y:dx = dv$ wird, so entsteht

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{r}\sqrt{1+v^2}.$$

Fig. 279.

Wenn man nun alles, was v enthält, auf die linke Seite, dx auf die rechte Seite schafft, so lassen sich beide Seiten der Gleichung

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{r}$$

integriren, und es muss

$$2)\qquad l\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) = \frac{x}{r} + C$$

sein, worin $C = 0$ wird, da für $x = 0$ auch $v = 0$. Behufs weiterer Integration muss letztere Gleichung nach v aufgelöst werden. Zur Beseitigung des Wurzelzeichens muss man dafür sorgen, dass der Wurzelausdruck auf der einen Seite der Gleichung allein steht, dann ist durch Quadrirung das Ziel erreicht. Es wird also zunächst

$$v + \sqrt{1+v^2} = e^{\frac{x}{r}} \text{ und } \sqrt{1+v^2} = e^{\frac{x}{r}} - v,$$

dann $$1 + v^2 = e^{\frac{2x}{r}} - 2ve^{\frac{x}{r}} + v^2, \text{ also } v = \frac{e^{\frac{2x}{r}} - 1}{2e^{\frac{x}{r}}} \text{ oder,}$$

wenn man die Division mit $e^{\frac{x}{r}}$ ausführt,

$$3)\qquad v = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{r}} - e^{-\frac{x}{r}}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Schreibt man dies

$$dy = {}^1\!/_2\, r \left[e^{\frac{x}{r}} d\left(\frac{x}{r}\right) + e^{-\frac{x}{r}} d\left(-\frac{x}{r}\right)\right], \quad \text{so wird}$$

$$y = {}^1\!/_2\, r \left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}} + C_1\right) \quad \text{und } C_1 = 2,$$

weil $x = 0$ auch $y = 0$ liefern muss. Verschiebt man nun den Koordinaten-Anfang um den Krümmungshalbmesser r (für den Scheitel) nach unten (Fig. 280), so ist das bisherige y mit $y - r$ zu vertauschen, und es wird dann

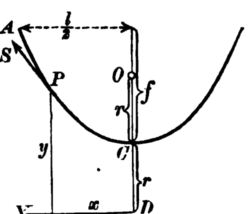


Fig. 280.

4) $$y = {}^1\!/_2\, r \left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right)$$

die übliche Gleichung der gemeinen Kettenlinie.

Setzt man vorübergehend $e^{\frac{x}{r}} = w$, so kann Gl. 4 auch

$$2\,\frac{y}{r} = w + \frac{1}{w}$$

geschrieben und nach w aufgelöst werden; dann wird

$$w = e^{\frac{x}{r}} = \frac{y}{r} \pm \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1}, \quad \text{also}$$

$$\frac{x}{r} = \mathrm{l}\left(\frac{y}{r} \pm \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1}\right). \quad \text{Es ist aber}$$

$$\frac{y}{r} - \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1} = \frac{1}{\frac{y}{r} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1}},$$

so dass man auch schreiben kann

5) $$\frac{x}{r} = \pm\, \mathrm{l}\left(\frac{y}{r} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2} - 1}\right).$$

Die Belastungslinie, welche zur gemeinen Kettenlinie gehört, ergiebt sich, wenn man in Gl. 1 den Werth für $dy : dx$ aus Gl. 3 einführt. Es wird

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{r}} - 2 + e^{-\frac{2x}{r}}\right)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right),$$

wofür man mit Rücksicht auf Gl. 4 schreiben kann

6) $$\frac{ds}{dx} = \frac{y}{r}. \quad \text{Also ist } z = q\frac{y}{r}$$

die Belastungshöhe. Trägt man q in solchem Maſsstabe auf, dass es durch r dargestellt wird, so ergiebt sich einfach

7) $$z = y, \quad \text{d. h.}$$

die wagerechte Achse DX (Fig. 280) bildet die Belastungslinie.

Für die Spannkraft S der Kette an beliebiger Schnittstelle gilt, da (Fig. 278) $S \cos \vartheta = H$ oder $S = H \sec \vartheta = H^{ds}/_{dx}$, nach Gl. 6 einfach

8) $$S = \frac{H}{r} y = qy \quad (\text{weil } H = qr).$$

Dieselbe Spannkraft würde auch allein durch das eigene Gewicht eines Kettenstückes von der Länge y entstehen, wenn dasselbe, bei P befestigt, lothrecht herabhinge. Diese Länge kann die Spannungslänge für den Punkt P genannt werden.

Hat man statt einer Kette einen biegsamen Riemen oder ein Seil, dessen Querschnitt F durch die Kraft S gleichmäſsig mit σ gespannt wird, und dessen Dichte γ ist, so ergiebt sich, weil $\gamma F = q$,

9) $$\sigma = \frac{S}{F} = \frac{q}{F} y = \gamma y.$$

Die Spannung hat also am höchsten Punkte der Kette den gröſsten Werth.

Die Berechnung der Koordinaten einer gemeinen Kettenlinie kann durch die Benutzung einer Tabelle erleichtert werden. Setzt man nämlich $^x/_r = u$, so ist $^1/_2\left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right) = {^1/_2}\left(e^u + e^{-u}\right)$, was wir zur Abkürzung $F(u)$ nennen wollen, nur von u abhängig und für angenommene Werthe von u leicht tabellarisch zu berechnen. Es wird dann (nach Gl. 4) einfach

10) $$y = rF(u) \quad \text{und} \quad x = ru.$$

Die $F(u)$ wird der hyperbolische Cosinus von u genannt.

Tabelle der $F(u) = \frac{1}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)$ *).

u	$F(u)$	$\frac{F(u)-1}{u}$	u	$F(u)$	$\frac{F(u)-1}{u}$	u	$F(u)$	$\frac{F(u)-1}{u}$
0,1	1,0050	0,0500	1,1	1,6685	0,6077	2,1	4,1443	1,4973
0,2	1,0201	0,1005	1,2	1,8107	0,6756	2,2	4,5679	1,6218
0,3	1,0453	0,1510	1,3	1,9709	0,7468	2,3	5,0372	1,7553
0,4	1,0811	0,2028	1,4	2,1509	0,8221	2,4	5,5569	1,8987
0,5	1,1276	0,2552	1,5	2,3524	0,9016	2,5	6,1323	2,0529
0,6	1,1855	0,3091	1,6	2,5775	0,9859	2,6	6,7690	2,2189
0,7	1,2552	0,3646	1,7	2,8283	1,0755	2,7	7,4735	2,3976
0,8	1,3374	0,4218	1,8	3,1075	1,1708	2,8	8,2527	2,5900
0,9	1,4331	0,4812	1,9	3,4177	1,2725	2,9	9,1146	2,7981
1,0	1,5431	0,5431	2,0	3,7622	1,3811	3,0	10,068	3,0226

Ist der Krümmungshalbmesser r für den Scheitel gegeben, so erhält man nach Gl. 10 die Koordinaten verschiedener Punkte der Kettenlinie durch einfache Multiplikation der Tabellenwerthe u und $F(u)$ mit r.

Sind aber die Spannweite l und die Pfeilhöhe f gegeben, so ist r noch unbekannt. Für den Endpunkt A der Kettenlinie (Fig. 280) wird dann aber $\frac{1}{2} l = r u_1$ und $f + r = r F(u_1)$, worin u_1 denjenigen Werth dieser Hülfsgröße bedeutet, welcher dem Endpunkte A entspricht. Es folgt daraus

$$11) \qquad \frac{F(u_1) - 1}{u_1} = \frac{2f}{l} \quad \text{und} \quad r = \frac{l}{2 u_1}.$$

Beispiel: Ist $f = l = 1$ gegeben, so muss für den Endpunkt

$$\frac{F(u_1) - 1}{u_1} = 2$$

sein. In der letzten Spalte der Tabelle erkennt man dann, dass der entsprechende Werth von u_1 zwischen 2,4 und 2,5 liegt. Einfache Interpolation bestimmt ihn zu 2,47. Hiernach wird dann $r = \frac{l}{2 u_1} = 0{,}20243$. Man kann nun leicht bis zu 24 Paare von Koordinaten berechnen, indem man die Zahlen der Tabelle für u und $F(u)$ mit 0,20243 multiplicirt.

III. Kettenlinie für überall gleiche Anstrengung.

Bei der gemeinen Kettenlinie ergab sich die stärkste Anstrengung an den Befestigungspunkten (falls Kette oder Seil

*) Eine umfangreichere Tabelle dieser Art findet sich in dem Taschenbuche der Mathematik von Dr. W. Ligowski, 2. Aufl., S. 28; Berlin 1873; ebenso in der 15. Auflage der „Hütte", S 63.

völlig gleichartig angeordnet sind. Will man die Anstrengung gleichmäfsig machen, so muss in gleichem Verhältnisse mit der Spannkraft S auch der Querschnitt F, folglich auch das Gewicht q der Bogeneinheit zunehmen. Dadurch ändert sich dann die Belastungsart, mithin auch die Gleichgewichtsform.

Beziehen sich F_0 und q_0 auf den Scheitelpunkt, so wird

1) $$\frac{q}{q_0} = \frac{F}{F_0} = \frac{S}{H} = \frac{ds}{dx},$$

und weil wiederum $z = q\frac{ds}{dx}$, so wird jetzt

2) $$z = q_0\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{H}{r}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Die Grundgleichung 1 (S. 314) liefert daher

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{1+v^2} = \frac{dx}{r},$$

wenn man wiederum $dy = v\,dx$ setzt. Die Integration führt zu

$$\operatorname{arc\,tg} v = \frac{x}{r} + C \text{ mit } C = 0$$

(da für $x = 0$ auch $v = 0$ sein muss), oder

3) $$v = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{r} \quad \text{und} \quad dy = r\operatorname{tg}\frac{x}{r}\,d\left(\frac{x}{r}\right).$$

Wenn man diese Gleichung integrirt, so ergiebt sich

4) $$\frac{y}{r} = \operatorname{l}\sec\frac{x}{r}.$$

(Die Konstante verschwindet wieder, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll.)

Die überall gleiche Anstrengung σ kann man aus den Verhältnissen des Scheitelpunktes leicht finden. Es wird

5) $$\sigma = \frac{H}{F_0} = \frac{r\,q_0}{F_0} = r\gamma.$$

Zur Berechnung der Koordinaten dieser Kettenlinie gleicher Anstrengung führt man zweckmäfsig wiederum eine Hülfsgrösse ein, u. zw. dies Mal den Neigungswinkel ϑ der Kurve in abgerundetem Gradmafse, damit man arc ϑ

und $\cos\vartheta$ leicht finden und danach $\sec\vartheta$ und $l\sec\vartheta$ berechnen kann. Nach Gl. 3 ist nämlich $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{r}$, mithin $\frac{x}{r} = \operatorname{arc}\vartheta$ und $\frac{y}{r}\ l\sec\vartheta$. Die Werthe $^x/_r$ und $^y/_r$ sind einer Tabelle*) zu entnehmen.

Zeichnet man zu derselben Spannweite und Pfeilhöhe eine Parabel, eine gemeine Kettenlinie und eine Kettenlinie überall gleicher Anstrengung, so hat letztere den gröfsten, die Parabel den kleinsten Scheitelhalbmesser r. Die Parabel liegt daher innerhalb, die Kettenlinie gleicher Anstrengung aber aufserhalb der gemeinen Kettenlinie.

IV. Belastungslinie der kreisförmigen Drucklinie.

Um zu finden, welche Belastungslinie einer kreisförmigen Drucklinie vom Halbmesser r entspricht (Fig. 281), wendet man die Gl. 2 und 3 (S. 315) an. Es wird dann

$$r = \frac{H}{z}\sec^3\vartheta = \frac{r z_0}{z}\sec^3\vartheta, \qquad \text{mithin}$$

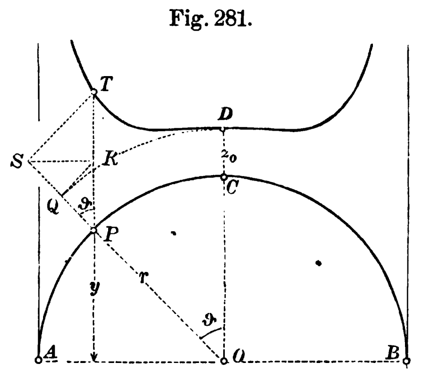
$$z = z_0 \sec^3\vartheta. \tag{1}$$

Hierin ist z_0 die Belastungshöhe im Scheitel, ϑ der Neigungswinkel der Drucklinie gegen die Wagerechte, oder der Winkel, den der beliebige Halbmesser OP mit der Lothrechten einschliefst. Während ϑ von Null bis $\pi/2$ wächst, nimmt auch $\sec\vartheta$, also auch z fortwährend zu; $\vartheta = \pi/2$ giebt

$$\sec\vartheta = \infty \quad \text{und} \quad z = \infty.$$

Die Belastungslinie nähert sich daher asymptotisch den beiden lothrechten Tangenten an die halbkreisförmige Drucklinie.

Fig. 281.



Gl. 1 ist leicht zu konstruiren: Man trage auf einem Halbmesser OP das Stück $PQ = z_0$ ab, ziehe QR rechtwinklig zu

*) Eine solche Tabelle findet sich in dem Buche von G. Hagen „Ueber Form und Stärke gewölbter Bögen", 2. Aufl. Berlin 1874, S. 75.

PQ, dann ist $PR = z_0 \sec\vartheta$; wird darauf RS wagerecht und ST wieder rechtwinklig zu PS gezogen, so muss

$$PS = PR \sec\vartheta = z_0 \sec^2\vartheta \quad \text{und} \quad PT = z_0 \sec^3\vartheta,$$

also T ein Punkt der Belastungslinie sein.

Die Gestalt der Belastungslinie ist verschieden je nach dem Verhältnisse $z_0 : r$ (Fig. 281). Bezeichnet nämlich y die Ordinate des Punktes P der Drucklinie, y_1 diejenige des Punktes T der Belastungslinie, so ist

$$y_1 = y + z = y + z_0 \sec^3\vartheta = y + z_0 \frac{r^3}{y^3}.$$

Dann wird $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{3 z_0 r^3}{y^4}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{3 z_0 r^3}{y^4}\right)$ und

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \left(1 - \frac{3 z_0 r^3}{y^4}\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{12 z_0 r^3}{y^5}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

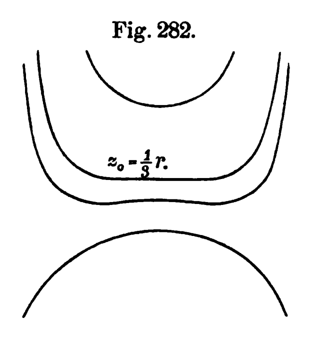
Für den Scheitel wird

$$x = 0, \quad y = r, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{r}, \qquad \text{daher}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\left(1 - \frac{3 z_0}{r}\right)\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{3 z_0}{r} - 1\right).$$

Ist nun die Belastungshöhe im Scheitel $z_0 < {}^1\!/_3\, r$, so wird $\frac{d^2 y_1}{dx^2} < 0$; die Belastungslinie kehrt daher bei D (ebenso wie die Drucklinie bei C) die konvexe Seite nach oben, entfernt sich zuerst nur langsam vom Kreise, hat dann (auf jeder Seite) einen Wendepunkt und steigt nun erst kräftig nach oben. Bei $z_0 > {}^1\!/_3\, r$ kehrt die Belastungslinie schon im Scheitel die konvexe Seite nach unten, beginnt also schon hier zu steigen und setzt dies ununterbrochen fort; Wendepunkte sind nicht vorhanden. Im Grenzfalle $z_0 = {}^1\!/_3\, r$ (Fig. 282) fallen die beiden Wendepunkte des ersten Falles im Scheitel zu einem einzigen zusammen; die Krümmung ist hier Null, und die Belastungslinie entfernt sich nur sehr langsam von einer wagerechten Geraden, geht dann aber aufwärts.*)

Fig. 282.

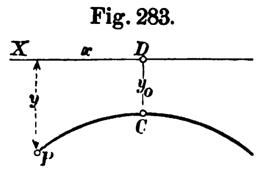


*) J. W. Schwedler, Theorie der Stützlinie; Zeitschrift für Bauwesen 1859, S. 113.

V. Hagen'sche Drucklinie für wagerechte Belastungslinie.

Die gegebene wagerechte Belastungslinie werde zur Achse DX gewählt; CP (Fig. 283) sei die entsprechende Drucklinie, deren Gleichung entwickelt werden soll. Wegen dieser Wahl des Achsenkreuzes werden die Belastungshöhen z_0 und z gleich den Ordinaten y_0 und y, so dass die Grundgleichung 1 (S. 314) für diesen Fall lautet

Fig. 283.



1) $$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{y}{H} = \frac{y}{r y_0}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $2\,dy$, so kann man schreiben

$$2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{dx} = \frac{2\,y\,dy}{r y_0}$$ und beiderseits integriren.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{r y_0} + C.$$

Damit für den Scheitel $y = y_0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ werde, muss $C = -\frac{y_0^2}{r y_0}$ sein, daher

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{y^2 - y_0^2}}{\sqrt{r y_0}}.$$

Trennt man nun die Veränderlichen (bringt y und dy nach links, dx nach rechts), so ergiebt sich

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{r y_0}}$$

und nach Integration

$$l\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2}}{y_0}\right) = \pm \frac{x}{\sqrt{r y_0}} + C_1,$$

worin $C_1 = 0$ wird, so dass die Gleichung der Drucklinie lautet

2) $$x = \pm \sqrt{r y_0}\; l \,\frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2}}{y_0}.$$

Durch denselben Rechnungsgang, der auf S. 316 von Gl. 2 zu

Gl. 3 führte, kann man auch vorstehende Gleichung nach y auflösen:

$$y = \frac{y_0}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{r y_0}}}\right). \qquad 3)$$

Die Linie, welche durch die Gl. 2 und 3 bestimmt ist, wurde von G. Hagen (Berlin) im Jahre 1844 für die Gestaltung von Brückengewölben empfohlen.

Ist die Belastungshöhe im Scheitel gleich dem Krümmungshalbmesser daselbst, d. h. $y_0 = r$, so wird aus Gl. 3 die Gleichung der gemeinen Kettenlinie. (Auf S. 318 wurde ja auch schon gezeigt, dass die Belastungskurve der gemeinen Kettenlinie eine Gerade wird für $z_0 = q = r$.)

Sind r und y_0 gegeben, so ist die Hagen'sche Drucklinie völlig bestimmt.

Für $y_0 > {}^1/_3 r$ hat die Kurve im Scheitel den kleinsten Krümmungshalbmesser, und es nimmt die Krümmung von hier aus fortwährend ab; denn sollte sich der Krümmungshalbmesser nicht ändern, sollte die Drucklinie kreisförmig sein, so müsste nach S. 322 für $y_0 > {}^1/_3 r$ die Belastungskurve von der Mitte aus ansteigen; da hier aber dies Ansteigen nicht stattfindet, also z kleiner ist als für kreisförmige Drucklinie, so muss sich ρ vergrößern, weil nach Gl. 2, S. 315 ρ sich mit z in umgekehrtem Verhältnisse ändert.

Für $y_0 < \frac{1}{3} r$ liegt die Belastungskurve für kreisförmige Drucklinie in der Nähe der Mitte unterhalb der Wagerechten durch den Scheitel der Belastungskurve und erhebt sich erst in einem gewissen Abstande über diese Wagerechte. Daraus kann man folgern, dass die Hagen'sche Drucklinie für $y_0 < {}^1/_3 r$ von der Mitte aus erst eine Zunahme, dann aber eine fortwährende Abnahme der Krümmung zeigen wird.

Für $y_0 = {}^1/_3 r$ findet von der Mitte aus eine Zunahme der Krümmung nicht statt, die Abnahme aber langsamer als für $y_0 > {}^1/_3 r$, so dass der mittlere Theil sich von einem Kreise nur wenig unterscheidet.

Wird $y_0 : r$ größer und größer, rückt also die Belastungslinie immer weiter in die Höhe, so ist die Veränderlichkeit der Belastungshöhe y nur gering im Verhältnisse zu y_0. Im Grenzfalle, für $y_0 : r = \infty$, kann daher die Belastungshöhe z als überall gleich angesehen werden, und die Drucklinie muss dann eine Parabel sein. Damit nun obige Gl. 3 in die Parabel-Gleichung übergehe, muss man zunächst den Koordinaten-Anfang von D (Fig. 283) nach dem Scheitel C der Drucklinie verlegen, weil sonst die Ordinaten unendlich groß werden würden. Es ist also y mit $y + y_0$ zu vertauschen, so dass

$$y = \frac{y_0}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} - 2\right)$$

entsteht. Für $y_0 = \infty$ nimmt dies zunächst die unbestimmte Form $\infty \cdot 0$ an. Setzt man aber vorübergehend

$$y_0 = \frac{1}{u^2}, \quad \frac{x}{\sqrt{r}} = a, \qquad \text{so wird}$$

$$2y = \frac{e^{au} + e^{-au} - 2}{u^2}.$$

Bildet man nun von Zähler und Nenner die Abgeleiteten nach u, so ergiebt sich nach zweimaliger Ausführung dieses Verfahrens:

$$2y = \left[\frac{a e^{au} - a e^{-au}}{2u}\right]_{u=0} = \frac{0}{0} = \left[\frac{a^2 e^{au} + a^2 e^{-au}}{2}\right]_{u=0} = a^2, \quad \text{also}$$

4) $$2y = \frac{x^2}{r} \quad \text{oder } x^2 = 2ry.$$

Man kann dies Ergebnis auch in anderer Weise, nämlich durch Benutzung der Reihe für e^{au}, erhalten:

$$e^{au} = 1 + au + \frac{a^2u^2}{2} + \frac{a^3u^3}{3!} + + \ldots.$$

$$e^{-au} = 1 - au + \frac{a^2u^2}{2} - \frac{a^3u^3}{3!} + - \ldots \quad \text{daher}$$

$$e^{au} + e^{-au} - 2 = 2\left(\frac{a^2u^2}{2} + \frac{a^4u^4}{4!} + \ldots\right) \quad \text{und}$$

$$2y = a^2 + 2\left(\frac{a^4u^2}{4!} + \frac{a^6u^4}{6!} + \ldots\right), \quad \text{also für } u = 0:$$

$$2y = a^2 = \frac{x^2}{r}.$$

Zur Berechnung der Koordinaten der Hagen'schen Drucklinie setze man $\frac{x}{\sqrt{ry_0}} = u$, so dass Gl. 3 (S. 324) wird $y = \frac{y_0}{2}(e^u + e^{-u})$.

Man kann nun die Tabelle auf S. 319 für $F(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ verwenden und daraus

5) $$x = u\sqrt{ry_0}, \quad y = y_0 F(u)$$

berechnen.*)

Ist die Belastungshöhe y_0 im Scheitel gegeben, statt r aber Spannweite l und Pfeilhöhe f, so muss für den Endpunkt der Drucklinie gelten

$$\tfrac{1}{2}l = u_1\sqrt{ry_0} \quad \text{und} \quad f + y_0 = y_0 F(u_1).$$

Letztere Gleichung giebt

6) $$F(u_1) = 1 + \frac{f}{y_0};$$

*) Dr. H. Zimmermann, Ueber Seilkurven; Centralblatt der Bauverwaltung 1883, S. 231.

aus der Tabelle kann man zu diesem Funktionswerthe den entsprechenden Werth von u_1 durch Interpolation finden und hat dann

$$7) \qquad \sqrt{r y_0} = \frac{l}{2 u_1}.$$

Beispiel: Für $l = 10^m$, $f = 3^1/_3{}^m$ und $y_0 = 1{,}9^m$ wird nach Gl. 6

$$F(u_1) = 1 + \frac{3{,}333}{1{,}9} = 2{,}7544.$$

Nach der Tabelle auf S. 319 liegt das entsprechende u_1 zwischen 1,6 und 1,7 und bestimmt sich durch Interpolation zu 1,67. Nach Gl. 7 wird dann

$$\sqrt{r y_0} = \frac{5}{1{,}67} = 2{,}994^m,$$

$$r y_0 = 8{,}964^{qm} \text{ und } r = 4{,}72^m.$$

Man erhält nun die Koordinaten x und y der Drucklinie, wenn man in der Tabelle (S. 319) die Werthe u mit 2,994, die Werthe $F(u)$ mit 1,9 multiplicirt. Nimmt man nur $u = 0$, 0,2, 0,4 usf., so erhält man

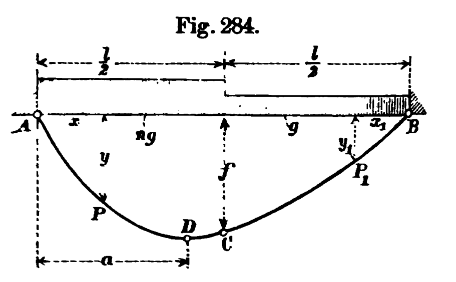
$x = 0$	0,60	1,20	1,80	2,40	2,99	3,59	4,19	4,79	5,00
$y = 1{,}9$	1,94	2,05	2,25	2,54	2,93	3,44	4,09	4,90	5,23.

Durch Auftragen dieser Koordinaten ergeben sich die Kurvenpunkte, die man dann leicht durch einige Kreisbögen verbinden kann. Weil in diesem Falle $\frac{y_0}{r}$ etwa 0,45, also etwas mehr als $\frac{1}{3}$ beträgt, so nimmt (nach S. 324) die Krümmung der Drucklinie vom Scheitel aus fortwährend ab, jedoch anfangs nur langsam.

VI. Ketten- und Drucklinien für unsymmetrische Belastung.

Eine in 2 Punkten A und B gleicher Höhenlage befestigte Kette (Fig. 284) sei über die rechtsseitige Hälfte der Spannweite l gleichmäfsig mit g für die Längeneinheit des Grundrisses, über die linksseitige Hälfte aber ebenso mit $n g$ belastet. Dann werden die beiden Theile AC und BC der Kettenlinie Parabeln mit lothrechter Achse sein (s. S. 315), jedoch wegen der verschiedenen Belastung von verschiedenem Parameter. Im Punkte C, welcher um f unter AB liegen möge, schliefsen sie sich mit gemeinschaftlicher

Fig. 284.



Tangente einander an; denn bei endlicher Belastungshöhe z bleibt auch $d^2y : dx^2$ endlich, so dass $dy : dx$ sich nur stetig ändern kann.

Bezieht man die Linie AC auf den Anfangspunkt A, BC aber auf B, so wird zunächst für einen Punkt P der AC (nach S. 314):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ng}{H}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{ng}{H}x + C; \quad y = -\frac{ng}{2H}x^2 + Cx.$$

(Das negative Zeichen rührt daher, dass die Kettenlinie der X-Achse die konkave Seite zukehrt.) Bei der zweiten Integration ist die Konstante Null.

Für einen Punkt P_1 der BC ist ebenso

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{g}{H}; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{g}{H}x_1 + C_1; \quad y_1 = -\frac{g}{2H}x_1^2 + C_1 x.$$

Für den Punkt C, d. h. für $x = x_1 = \frac{l}{2}$ ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{dy_1}{dx_1}$ und $y = y_1$. Das liefert die Gleichungen

$$-\frac{ng}{2H}l + C = \frac{g}{2H}l - C_1 \quad \text{und}$$

$$-\frac{ng}{8H}l^2 + C\frac{l}{2} = -\frac{g}{8H}l^2 + C_1\frac{l}{2}, \quad \text{welche}$$

$$C = \frac{gl}{8H}(1 + 3n) \text{ und } C_1 = \frac{gl}{8H}(3 + n) \quad \text{ergeben.}$$

Hiernach wird die Gleichung für AC:

1) $$y = \frac{gl}{8H}(1 + 3n)x - \frac{ng}{2H}x^2$$

und diejenige für BC:

2) $$y_1 = \frac{gl}{8H}(3 + n)x_1 - \frac{g}{2H}x_1^2.$$

Beide Gleichungen geben für die Ordinate des Punktes C:

3) $$f = \frac{gl^2}{16H}(n + 1).$$

AC ist eine Parabel vom Parameter $\frac{H}{ng}$, deren Scheitel D einen wagerechten Abstand

4) $$a = \frac{l}{8}\left(\frac{1}{n} + 3\right)$$

von A hat. Die Parabel BC hat den Parameter $\frac{H}{g}$, und der Scheitel der über C hinaus nach links verlängerten Kurve ist von B um

5) $$a_1 = {}^1/_8\, l\,(3+n)$$

in wagerechtem Sinne entfernt.

Für gleiche Werthe von x und x_1 ist das arithmetische Mittel aus y und y_1:

$$\frac{y+y_1}{2} = \frac{g\,(1+n)}{4\,H}\, x\,(l-x)\,.$$

Vertheilt man aber die Gesammtlast ${}^1/_2\, g\,l\,(1+n)$ gleichmäfsig über die ganze Spannweite, so entsteht bei gleicher Kraft H die parabolische Kettenlinie

$$y_0 = \frac{g\,(1+n)}{4\,H}\, x\,(l-x)\,,$$

so dass dieses y_0 gleich dem obigen Mittel ${}^1/_2\,(y+y_1)$ ist.

Wenn man also, von symmetrischer Belastung ausgehend, die eine Hälfte entlastet, die andere in gleichem Mafse mehr belastet und dabei H unverändert erhält, so hebt sich auf der einen Seite die Kettenlinie um ebenso viel, wie sie sich an der entsprechend liegenden Stelle der anderen Seite senkt. Die lothrechte Verschiebung beträgt

6) $$\frac{y-y_1}{2} = \frac{g\,(n-1)}{4\,H}\, x\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

sie ist am gröfsten für $x = {}^1/_4\, l$, nämlich $\frac{g\,l^2}{64\,H}\,(n-1)$.

Auf der Seite der schwereren Last hat die Parabel den kleineren Parameter, also die stärkere Krümmung.

Beispiel: Ist die Last der linken Seite doppelt so grofs wie die der rechten, d. h. $n=2$, so wird

$$y = \frac{7}{8}\frac{g\,l}{H}\,x - \frac{g}{H}\,x^2; \quad a = \frac{7}{16}\,l; \quad \text{der Parameter} = \frac{H}{2g};$$

$$y_1 = \frac{5}{8}\frac{g\,l}{H}\,x_1 - \frac{g}{2H}\,x_1^2; \quad a_1 = \frac{5}{8}\,l; \quad \text{der Parameter} = \frac{H}{g}.$$

Die gröfste lothrechte Verschiebung (im Sinne der Gl. 6) wird $\frac{g l^2}{64 H}$. Der Punkt C hat die Ordinate $f = \frac{3}{16}\frac{g\,l^2}{H}$, woraus man bei gegebenem f die Kraft H berechnen kann.

Ist bei gleichmäſsiger Belastung g der ganzen Länge des Grundrisses eine beliebig liegende **Einzellast** P vorhanden, so muss die Kettenlinie in dem Angriffspunkte dieser Last einen Knick bilden. Es kommt nämlich an dieser Stelle auf ein Längentheilchen dx die endliche Last P, so dass hier $z = P : dx = \infty$, mithin die Aenderung von $dy : dx$ unstetig wird. Sind die Spannkräfte unmittelbar links und rechts von der Last S und S_1 mit den Neigungswinkeln α und α_1, so muss

Fig. 285.

$$S \sin \alpha - S_1 \sin \alpha_1 = P,$$

oder, weil $S \cos \alpha = S_1 \cos \alpha_1 = H$,

7) $$H(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_1) = P$$ sein.

Bezieht man wieder das Kurvenstück AE auf A, das Stück BE auf B als Anfangspunkt, so wird für AE:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g}{H}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{g}{H}x + C; \quad y = -\frac{g}{2H}x^2 + Cx;$$

für BE:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = -\frac{g}{H}; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{g}{H}x_1 + C_1; \quad y_1 = -\frac{g}{2H}x_1^2 + C_1 x_1.$$

Zur Bestimmung von C und C_1 dienen die Bedingung in Gl. 7, sowie der Umstand, dass der Punkt E mit der Ordinate v beiden Linien gemeinsam ist. Die erste Bedingung lautet (da für $x = u$ $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$; für $x_1 = l - u$ $\frac{dy_1}{dx_1} = -\operatorname{tg} \alpha_1$):

$$-\frac{g}{H}u + C - \frac{g}{H}(l-u) + C_1 = \frac{P}{H};$$

die zweite (da für $x = u$ $y = v$, für $x_1 = l - u$ $y_1 = v$):

$$-\frac{g}{2H}u^2 + Cu = -\frac{g}{2H}(l-u)^2 + C_1(l-u).$$

Hieraus erhält man

$$C = \frac{P}{H}\frac{l-u}{l} + \frac{gl}{2H}; \quad C_1 = \frac{P}{H}\frac{u}{l} + \frac{gl}{2H},$$

so dass die Gleichungen für AE und BE nun werden:

8) $$y = \left(\frac{P}{H}\frac{l-u}{l} + \frac{gl}{2H}\right)x - \frac{g}{2H}x^2 \quad \text{und}$$

9) $$y_1 = \left(\frac{P}{H}\frac{u}{l} + \frac{gl}{2H}\right)x_1 - \frac{g}{2H}x_1^2.$$

Für $x = \frac{1}{2}l$ giebt Gleichung 9 als Ordinate des Punktes C:

10) $$f = \frac{1}{H}\left(\frac{Pu}{2} + \frac{gl^2}{8}\right),$$

woraus sich bei gegebenem f die Kraft H berechnen lässt.

AE ist eine Parabel vom Parameter $H:g$; bei entsprechender Fortsetzung über E hinaus würde ihr Scheitel in dem wagerechten Abstande

11) $$a = \frac{l}{2} + \frac{P}{gl}(l-u)$$

von A liegen. BE hat den gleichen Parameter, und ihr Scheitel D hat die Abscisse

12) $$a_1 = \frac{l}{2} + \frac{P}{gl}u.$$

VII. Drucklinie eines Gewölbes.

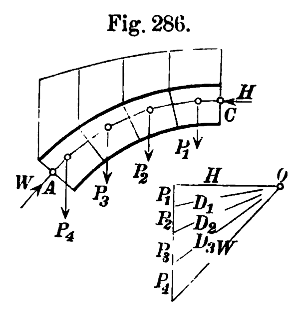
Ein Gewölbe mit geschlossenen Fugen, welches sich mit vollen Flächen gegen Widerlager stützt, ist als ein **elastischer Bogenträger ohne Gelenke** aufzufassen und daher 3 fach statisch unbestimmt. Es finden auf ein solches Gewölbe die Elasticitätsgleichungen 1—3, S. 262 Anwendung.

Weicht dasselbe nicht zu viel von einem flachen Parabelbogen überall gleichen Querschnitts ab, so kann man mittels Kämpferdrucklinie und Umhüllungslinie die Berechnung ganz so durchführen, wie für den Bogenträger S. 271 angedeutet wurde.

Aus der Art der Herstellung des Gewölbes entstehen aber verschiedene Einflüsse, die sich rechnungsmäſsig schwer verfolgen lassen, so dass es sich meistens empfiehlt, unter sinngemäſser Anwendung der für den parabolischen Bogenträger gefundenen Ergebnisse die Gewölbe unter vereinfachenden Annahmen mit Hülfe der Drucklinie zu berechnen.

Drucklinie eines symmetrisch angeordneten Gewölbes bei gegebenem Scheiteldrucke. Ist das Gewölbe völlig symmetrisch zu einer lothrechten Mittelebene (Fig. 286), und betrachtet man letztere als Schnittfläche für das Gewölbe, so muss die an diesem Schnitt auftretende Spannkraft eine wagerechte Druckkraft H sein (nach dem Gesetze der Wechselwirkung und mit Rücksicht auf die Symmetrie). Wäre diese Kraft H nach Gröſse und Lage bekannt, so würden die Spannungsverhältnisse des Gewölbbogens völlig bestimmbar sein.

Fig. 286.

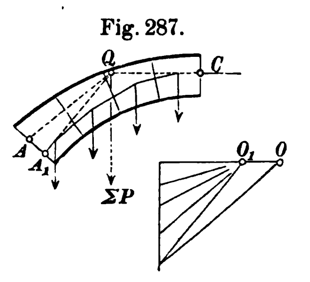


Man theile nämlich die Gewölbhälfte (deren Länge rechtwinklig zur Bildebene gleich Eins sein mag) durch Fugen in mehrere (z. B. 4) Theile, welche Gewölbsteine genannt werden können, stelle die auf die einzelnen Steine kommenden Belastungen (Uebermauerung, Ueberschüttung und dgl.), die vorläufig nur lothrecht wirken sollen, durch Flächen dar, welchen die gleiche Dichtigkeit γ_1 wie den Steinfiguren beigelegt wird, und vereinige das Gewicht jedes Gewölbsteines mit der auf ihm liegenden Last zu den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4. Setzt man nun den Scheiteldruck H mit den Kräften P unter Anwendung von Krafteck und Seileck zusammen, so geben die vom Pole O aus gezogenen Strahlen des ersteren die Drücke D_1, D_2, D_3 der Zwischenfugen und den Widerlagerdruck W nach Gröſse und Richtung an, während die dazu parallelen Seiten des Seilecks die Lagen dieser Kräfte zeigen. Es beruht dies darauf, dass an jedem Gewölbsteine die beiden Fugendrücke mit dem Gewichte P im Gleichgewichte sein müssen. Der Schnittpunkt einer Seite des Seilecks mit der entsprechenden Fuge ist der Spannungsmittelpunkt der letzteren. Mit diesem und der Gröſse und Richtung des in ihm angreifenden Druckes ist dann die Vertheilung der Spannung über die Fuge nach der Lehre vom exentrischen Drucke (S. 143) gegeben.

Die angenommene Gröſse und Lage von H liefert schlieſslich den Angriffspunkt A des Kämpferdruckes W. Das Seileck ist aber auch bestimmbar, wenn statt der Gröſse von H der Spannungsmittelpunkt A der Kämpferfuge gegeben ist. In

diesem Falle nehme man für den Scheitelschub zunächst eine beliebige Gröfse H_1 an, zeichne mit dem Pole O_1 das Krafteck und, mit dem gegebenen Punkte C beginnend, das Seileck, dessen letzte Seite die Kämpferfuge nun im Allgemeinen nicht in dem gegebenen Punkte A, sondern an einer Stelle A_1 schneiden wird. Man kann dann leicht Kraft- und Seileck so abändern, dass der gegebenen Bedingung genügt wird. Verlängert man nämlich die erste und die letzte Seite H_1 und W_1 des vorläufigen Seilecks bis zum Schnittpunkte Q, so muss durch diesen das Gesammtgewicht ΣP der Gewölbhälfte hindurch gehen, weil W_1 die Mittelkraft aus H_1 und den sämmtlichen Gewichten darstellt. Weil aber ΣP eine bestimmte Lage hat, so muss der Punkt Q von der Wahl der beliebigen Kraft H_1 unabhängig sein. Die letzte Seite des gesuchten Seilecks muss daher durch A und auch durch Q hindurchgehen. Zieht man nun durch den unteren Endpunkt des Kraftecks eine Parallele zu AQ, so bestimmt diese den neuen Pol O, somit das endgültige Krafteck und Seileck. Weil dem Punkte A ein Punkt B am rechtsseitigen Kämpfer entspricht,

Fig. 287.



so kann man also sagen, dass die Spannungsmittelpunkte dreier Fugen das Krafteck und das Seileck eines Gewölbbogens völlig bestimmen. Der Einfachheit halber wurde im Vorstehenden das Gewölbe symmetrisch angenommen, doch findet man leicht, dass das Ergebnis auch für ein unsymmetrisches Gewölbe und beliebige Lage der Punkte A, C und B gelten muss. Diese 3 gegebenen Punkte haben nämlich für die Berechnung ganz dieselbe Bedeutung, wie 3 reibungslose Gelenke, da bei letzteren die Druckübertragung nur in den Gelenkmitten (Gelenkpunkten) erfolgen kann. Die Widerlagerdrücke eines Gewölbbogens mit 3 gegebenen Spannungsmittelpunkten würden daher mittels der Momentengleichungen berechnet werden können, womit dann auch Kraft- und Seileck bestimmt wären. Man gelangt auf diese Weise wieder zu dem bekannten Ergebnisse, dass ein Bogenträger (und ebenso ein Gewölbbogen) durch Anordnung dreier Gelenke statisch bestimmbar wird.

Wir haben uns im Vorstehenden das Gewölbe nach dem üblichen Fugenschnitte zerlegt gedacht; man erhält aber denselben Widerlagerdruck W, wenn man das Gewölbe in anderer Weise eintheilt, weil W nur von H und dem Gesammtgewichte der Gewölbhälfte abhängt. Für Gewölbe von nicht sehr großem Pfeilverhältnis empfiehlt sich die Theilung des Bogens und der Ueberlast durch lothrechte Schnitte, weil man dann die einzelnen Stücke als schmale Trapeze behandeln kann. Die mittleren Seiten des Seilecks ändern sich dadurch etwas, doch kann diese Abweichung meist unberücksichtigt bleiben.

Das Seileck bezeichnet die Gleichgewichtsform einer Gelenkstangen-Verbindung, welche in den Gelenkpunkten durch die Gewichte der betreffenden Gewölbtheile belastet ist. Denkt man sich nun die Zahl der Schnitte größer und größer werdend, so entsteht aus dem Seileck eine Seilkurve und (damit gleichbedeutend) aus dem Gelenkstangen-Vieleck eine Drucklinie, so dass die Untersuchungen über Ketten- und Drucklinien (S. 315 bis 330) bei der Anordnung und Berechnung der Gewölbe benutzt werden können.

Jedem gegebenen Belastungsgesetze entspricht eine bestimmte Kurvengattung als Ketten- oder Drucklinie; jedoch gehören einer solchen Gattung immer unendlich viele einzelne Kurven an, die sämmtlich statisch mögliche Kettenlinien zu einer bestimmten Belastung darstellen. Hat z. B. die Belastung z der Längeneinheit des Grundrisses den überall gleichen Werth q, so sind die entsprechenden Kettenlinien Parabeln mit lothrechter Achse vom Parameter $H:q$. Jedem (willkürlichen) Werthe von H entspricht dann eine besondere Parabel. — Auch von der Kurvengattung der Hagen'schen Drucklinie mit einer bestimmten Belastungshöhe y_0 im Scheitel giebt es unendlich viele verschiedene Fälle, je nach der Wahl des Krümmungshalbmessers r im Scheitel. Hat nun ein Gewölbbogen eine Belastungsart, die einer wagerechten Belastungslinie entspricht, so wird die Drucklinie des Gewölbes eine Hagen'sche Linie sein müssen. Von den unendlich vielen Einzelformen dieser Kurvengattung würde eine einzige scharf bestimmt sein, wenn für die Drucklinie 3 Punkte gegeben wären, oder außer dem Scheitel C noch ein Punkt A, etwa der Endpunkt, so dass dann aus Pfeilhöhe und Spannweite die Größe r (in der auf S. 325 gezeigten Art)

berechnet und die Drucklinie in das Gewölbe eingezeichnet werden könnte.

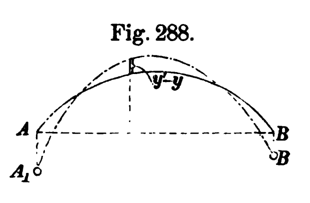
Aus diesen Erläuterungen folgt, dass die wirkliche Drucklinie eines Gewölbes mit gegebener Belastung dreifach statisch unbestimmt ist, dass aber die unendlich vielen statisch möglichen Drucklinien einer bestimmten, nur von der Belastungsart abhängigen Kurvengattung angehören.

Dr. E. Winkler's Satz über die Drucklinie in einem Gewölbe nach der Elasticitätslehre.*) Man kann die drei Elasticitäts-Gleichungen (S. 262) eines Bogenträgers ohne Gelenke unmittelbar auf die Bestimmung der Drucklinie eines Gewölbes anwenden.**) Die hierzu erforderlichen Entwicklungen sind aber für den Rahmen dieses Buches zu umfangreich, so dass wir uns auf eine annähernde Lösung der Frage beschränken müssen.

Winkler hat nun den Satz bewiesen: unter Vernachlässigung des Einflusses, den die Verkürzung der Mittellinie des Bogens durch die Längskraft N ausübt, und bei überall gleichem Querschnitt ist unter allen statisch möglichen Drucklinien diejenige die richtige, welche sich der Mittellinie durchschnittlich am meisten nähert, wenn man das Wort „durchschnittlich“ im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate deutet.

Der Beweis dieses Satzes wird am besten indirekt geführt: wir nehmen den Satz als richtig an und untersuchen, was daraus folgt. AB sei die Mittellinie des Bogens mit den Koordinaten x und y, $A_1 B_1$ die Drucklinie desselben mit den Koordinaten x und y'. Dann ist der lothrechte Abstand beider $y' - y$; soll also die Summe der Quadrate der Abweichungen möglichst klein sein, so kann dies geschrieben werden:

Fig. 288.



1) $$\int (y' - y)^2\, ds = S \quad \text{ein Minimum.}$$

*) Dr. E. Winkler, Beitrag zur Theorie der Bogenträger; Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1879, S. 210.

**) H. Müller-Breslau, Elasticitätstheorie der Tonnengewölbe; Zeitschrift für Bauwesen 1882, S. 35 und 211. — Ferner Elasticitätstheorie der nach der Stützlinie geformten Tonnengewölbe; a. a. O. 1886, S. 273.

Aus der Grundgleichung der Drucklinien $\frac{d^2 y'}{d x^2} = \frac{z}{H}$ ergiebt sich nun durch zweimalige Integration

$$y' = \frac{f(x)}{H} + A x + B. \tag{2}$$

Diese Gleichung umfasst alle in dem gegebenen Belastungsfalle statisch möglichen Drucklinien. Das Glied $f(x)$ ist nur von der gegebenen Belastungsart abhängig, daher ein bestimmter Werth; dagegen sind B und A statisch unbestimmte Integrations-Konstanten, die von der Lage der Drucklinie im Gewölbe abhängen, H ein ebenfalls statisch nicht bestimmbarer Seitenschub. Der lothrechte Abstand

$$y' - y = \frac{f(x)}{H} + A x + B - y \tag{3}$$

ist daher als eine Funktion der unbestimmten Gröfsen B, A und H zu betrachten. Die Bedingung $S = \int (y' - y)^2 \, d s$ ein Minimum verlangt hiernach das Nullwerden der 3 theilweisen Abgeleiteten,

d. h. $$\frac{\partial S}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial H} = 0.$$

Nach Gl. 1 und 3 wird aber

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2 \int (y' - y) \frac{\partial (y' - y)}{\partial B} d s = 2 \int (y' - y) \, d s$$

(weil nach Gl. 3 $\frac{\partial (y' - y)}{\partial B} = 1$), mithin

$$\int (y' - y) \, d s = 0. \tag{4}$$

Ebenso wird $\frac{\partial S}{\partial A} = 2 \int (y' - y) \frac{\partial (y' - y)}{\partial A} d s = 2 \int (y' - y) \, x \, d s$,

also

$$\int (y' - y) \, x \, d s = 0. \tag{5}$$

Schliefslich ist

$$\frac{\partial S}{\partial H} = 2 \int (y' - y) \frac{\partial (y' - y)}{\partial H} d s = - 2 \int (y' - y) \frac{f(x)}{H^2} d s$$

oder, wenn man $f(x)$ aus Gl. 2 berechnet,

$$\frac{\partial S}{\partial H} = - \frac{2}{H} \left\{ \int (y' - y) \, y' d s - A \int (y' - y) \, x \, d s - B \int (y' - y) \, d s \right\}.$$

Weil nun die letzten beiden Glieder nach Gl. 4 und 5 verschwinden, so wird $\int (y' - y) y' \, d s = 0$. Soll aber, wie angenommen, die Drucklinie sich der Mittellinie möglichst nähern, so kann man in dem letzten Ausdrucke annähernd y' mit y vertauschen und erhält dann die dritte Bedingung

$$\int (y' - y) \, y \, d s = 0. \tag{6}$$

Die Drucklinie $A_1 U$ (Fig. 289) giebt an irgend einer Schnittstelle durch ihre Tangente die Lage und Richtung der inneren Spannkraft an, die also bei U angreifen muss und in H und Q zerlegt werden kann. Demnach ist

$$M = H \cdot \overline{UP} = H (y' - y) \tag{7}$$

das Biegungsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt P der Schnittfläche und

$$y' - y = \frac{M}{H}. \tag{8}$$

Fig. 289.

Die Gl. 4, 5 und 6 bedeuten hiernach:

$$\int \frac{M}{H} \, d s = 0; \quad \int \frac{M}{H} x \, d s = 0; \quad \int \frac{M}{H} y \, d s = 0; \quad \text{oder}$$

$$\int M \, d s = 0; \quad \int M x \, d s = 0; \quad \int M y \, d s = 0.$$

Diese letzten Gleichungen stimmen aber mit den 3 Elasticitätsgleichungen eines Bogenträgers überall gleichen Querschnitts (S. 263) überein, sobald man das Glied mit der Längskraft N vernachlässigt; der Winkler'sche Satz ist damit bewiesen (denn dass es sich nur um ein Minimum, nicht aber um ein Maximum der Abweichung beider Linien handeln kann, ist selbstverständlich).

Bei diesem Satze ist die Verkürzung der Bogenlinie ausdrücklich vernachlässigt. Es soll damit aber durchaus nicht gesagt sein, dass eine solche Vernachlässigung thatsächlich erfolgen dürfe; vielmehr wird man den Einfluss der Verkürzung auf die Lage der Drucklinie besonders zu ermitteln haben, u. zw. kann man dazu annäherungsweise die Werthe benutzen, welche sich dafür bei dem flachen parabolischen Bogenträger überall gleichen Querschnitts (S. 264) ergeben haben, wie dies im Folgenden geschehen soll.

VIII. Gewölbe mit unveränderlicher Belastung.

Erführe die Mittellinie des Gewölbes keine Verkürzung, so würde die Drucklinie sich der Mittellinie möglichst nähern; beide würden also vollständig zusammenfallen, falls die Mittellinie eine der für den vorhandenen Belastungszustand statisch möglichen Drucklinien wäre. Ein solches Zusammenfallen beider Linien bedeutet aber den günstigsten Spannungszustand für das Gewölbe, weil hierbei in jeder Fuge ein vollkommen centrischer Druck, mithin eine gleichmäfsige Spannungsvertheilung stattfindet.

Bei einem Gewölbe von unveränderlicher Belastung ist es daher zweckmäfsig, die Mittellinie nach einer, der Belastungsart entsprechenden, statisch möglichen Drucklinie zu formen. Ein solches Gewölbe heifst ein Drucklinien-Gewölbe.

Eine parabolische Mittellinie ist eine statisch mögliche Drucklinie bei gleichmäfsiger Belastung der Spannweite l, d. h. bei dem in Fig. 245, S. 270 dargestellten Zustande. In Folge der Verkürzung liegt hier aber der Angriffspunkt des Seitenschubes H im Scheitel um c oberhalb der Mittellinie, am Kämpfer um doppelt so viel unterhalb derselben, so dass die wahre Drucklinie eine um 3 c gröfsere Pfeilhöhe hat als die Mittellinie. Annähernd dieselbe Verschiebung der Drucklinie gegen die Mittellinie wird auch bei Drucklinien-Gewölben für andere (nicht gleichförmige) Belastungsarten entstehen, wenn die Form der Mittellinie nicht zu sehr von einer Parabel abweicht.

Zur Berechnung dieser Verschiebungen kommt zunächst der Werth $\zeta = \frac{45}{4}\frac{J}{Ff^2}$ (Gl. 10, S. 265) in Frage. Bei einer Gewölbstärke d ist die Querschnittsfläche $F = d \cdot 1$, das Trägheitsmoment $J = {}^1/_{12}\, d^3 \cdot 1$, daher $\zeta = \frac{45}{4}\frac{d^2}{12 f^2} = \frac{15}{16}\frac{d^2}{f^2}$, wofür man rund

$$1) \qquad \zeta = \frac{d^2}{f^2}$$

setzen kann. Dann wird (nach Gl. 20, S. 271)

$$2) \qquad c = \frac{1}{3} f \zeta = \frac{1}{3}\frac{d^2}{f}.$$

Bei veränderlicher Gewölbstärke wird für d die mittlere Stärke gesetzt.

In Folge dieser Abweichung treten nun freilich auch in einem Drucklinien-Gewölbe Biegungsmomente auf, die man aber durch Wahl einer anderen Gewölbeform nicht beseitigen kann.

Soll ein Gewölbe nur sein eigenes Gewicht tragen und der Einfachheit wegen überall gleiche Dicke erhalten, so dass die Belastung sich gleichförmig über die Bogenlänge vertheilt, so wird es als Drucklinien-Gewölbe nach einer gemeinen Kettenlinie (symmetrisch nach oben umgeklappt) zu formen sein, weil diese der hier in Frage kommenden Belastungsart entspricht. Bei geringer Dicke des Gewölbes wird dann $\zeta = d^2 : f^2$ meist so klein, dass die Verschiebungen c und $2c$ der Drucklinie unberücksichtigt bleiben können und man die Drucklinie als mit der Mittellinie zusammenfallend ansehen kann. Dann gilt für die Spannung an irgend einer Stelle nach Gl. 9, S. 318 $\sigma = \gamma_1 y$, und für die stärkste Spannung am Kämpfer $\sigma = \gamma_1 (f + r)$, wenn γ_1 die Dichtigkeit des Mauerwerks bedeutet. Die Anstrengung ist demnach von der Gewölbstärke unabhängig, da mit zunehmender Dicke auch die Spannkräfte in gleichem Verhältnisse wachsen. Man kann daher die Dicke eines solchen Kettenlinien-Gewölbes so klein wählen, wie praktische Gesichtspunkte es zulassen.

Für den gleichen Zweck wird sich eine geringere Anstrengung ergeben, wenn man als Wölblinie eine Kettenlinie überall gleicher Anstrengung wählt (S. 319), zugleich aber die Gewölbstärke d so veränderlich macht, dass

$$d \cos \vartheta = d_0,$$

wenn d_0 die Scheitelstärke ist. Steht die Fuge rechtwinklig zur Mittellinie, so bildet sie mit der Lothrechten den Winkel ϑ; obige Gleichung bedeutet also, dass alle Fugen gleiche senkrechte Projektion haben müssen. Bei geringer Wölbstärke werden dann wiederum ζ und c klein, so dass nach Gl. 5, S. 330 annähernd eine überall gleiche Spannung $\sigma = \gamma_1 r$ im Gewölbe entsteht, unabhängig von der Gewölbstärke.

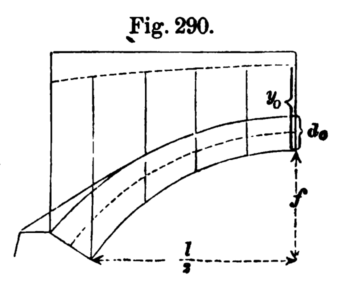
Soll ein Gewölbe von beliebig gestalteter Mittellinie berechnet werden, so sucht man zunächst auf Grund des Winkler'schen Satzes diejenige statisch mögliche Drucklinie, welche sich der Mittellinie durchschnittlich am meisten nähert. Es genügt, diese Untersuchung zeichnerisch auszuführen, indem man zuerst ein Seileck durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfuge legt und

dieses durch Probiren derartig verschiebt und abändert, dass nach Augenmafs ein gutes Anschmiegen an die Mittellinie stattfindet. Man berechnet dann $c = \frac{1}{3} d^2 : f$, verlegt den Angriffspunkt im Scheitel um c nach oben, den am Kämpfer um $2c$ nach unten und kann eine durch die so bestimmten Punkte gezeichnete Drucklinie annähernd als die wahre betrachten, wonach der Spannungszustand sich einfach bestimmen lässt.

IX. Brückengewölbe.

Die Brückengewölbe sind gewöhnlich in solcher Weise übermauert und überschüttet, dass oben eine wagerechte Begrenzung entsteht (Fig. 290). Die verschiedenen Stoffe, welche die Bedeckung bilden, werden mittels Veränderung der Höhen sämmtlich auf die Dichtigkeit γ_1 des Mauerwerks zurückgeführt. Dann ergiebt sich, wenn man im Folgenden durchweg γ_1 als Krafteinheit benutzt, die Belastungshöhe z_0 im Scheitel als Summe der (vorläufig nach Gutdünken angenommenen) Gewölbstärke d_0 im Scheitel, der Uebermauerung und der auf dieselbe Dichtigkeit zurückgeführten Ueberschüttung. (Solange die Oberfläche des Mauerwerks nur schwach geneigt ist, kann der Seitendruck der Ueberschüttung unberücksichtigt bleiben.) Auch nach der Zurückführung auf gleiche Dichtigkeit ist die so entstehende Belastungslinie meist noch wenig von einer wagerechten Geraden abweichend, so dass die Hagen'sche Drucklinie (S. 323) annähernd diesen Belastungsverhältnissen entspricht; daher empfiehlt es sich, die Mittellinie des Brückengewölbes (wenigstens vorläufig) nach einer Hagen'schen Drucklinie zu formen. Eine Schwierigkeit besteht zunächst darin, dass gewöhnlich Spannweite l und Pfeilhöhe f für die innere Leibung, nicht aber für die Mittellinie gegeben sind und dass bei der verhältnismäfsig grofsen Dicke der Brückengewölbe diese beiden Linien ziemlich verschiedene Pfeilverhältnisse haben. Wenn man aber eine nachherige zeichnerische Prüfung und etwaige Berichtigung voraussetzt, so kann man die Annahme machen, dass die richtige Mittellinie und die zugehörige innere Leibungslinie des Gewölbes derselben

Fig. 290.



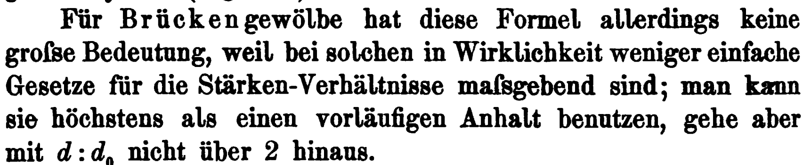
Kurvengattung angehören und sich nur durch einen verschiedenen Scheitelhalbmesser r unterscheiden. Man formt daher die innere Leibung nach einer Hagen'schen Drucklinie und trägt die angenommene Scheitelstärke d_0 auf.

Fiele die wahre Drucklinie mit der Mittellinie zusammen, so würde der völlig centrische Druck einer beliebigen Fuge $D = H \sec \vartheta$ sein. Für überall gleiche Spannung müssten dann die Gewölbstärken d und d_0 sich ebenso verhalten wie D und H, es müsste also

$$1) \qquad d \cos \vartheta = d_0 \,,$$

d. h. die lothrechte Projektion aller Fugen gleich d_0 sein (Fig. 291).

Fig. 291.



Für Brückengewölbe hat diese Formel allerdings keine grofse Bedeutung, weil bei solchen in Wirklichkeit weniger einfache Gesetze für die Stärken-Verhältnisse mafsgebend sind; man kann sie höchstens als einen vorläufigen Anhalt benutzen, gehe aber mit $d : d_0$ nicht über 2 hinaus.

Hiermit steht dann auch die äufsere Leibung zunächst fest, und nach Anbringung der Uebermauerung und Ueberschüttung kann nun die zeichnerische Prüfung erfolgen. Man lege durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge ein Seileck und ändere die Mittellinie des Gewölbes nöthigenfalls so, dass sie sich dem Seileck gut anschmiegt. Sodann berechnet man nach Gl. 1 u. 2 (S. 337) ζ und c, wobei man die mittlere Gewölbstärke berücksichtigt, und verlegt die Angriffspunkte von H im Scheitel und am Kämpfer wieder um c nach oben bezw. um $2\,c$ nach unten. Hiermit steht dann der Spannungszustand des unbelasteten Gewölbes annähernd fest; Voraussetzung ist, dass der betrachtete Gewölbbogen nicht zu grofse Pfeilhöhe hat (etwa bis $f = {}^1/_3\, l$).

Die bewegliche Belastung wird als gleichmäfsig vertheilt angenommen und in Form einer Belastungshöhe p (mit dem Einheitsgewichte γ_1) eingeführt. Bedeckt sie die ganze Spannweite, so kann dies als eine Vergröfserung der Belastungshöhe y_0 um p angesehen werden. Ohne Verkürzung der Mittellinie wäre dann der ganze Seitenschub $H = r\,(y_0 + p)$, mit Rücksicht auf diese wird aber

$$2) \qquad H = \frac{r\,(y_0 + p)}{1 + \zeta}\,.$$

Hierin bedeutet r den Krümmungshalbmesser der Drucklinie im Scheitel. Kann man denselben nicht einer Zeichnung entnehmen, so setze man annähernd

3) $$r = r_1 + d_0,$$

wenn r_1 für die innere Leibung gilt. (Bei überall gleicher Gewölbstärke würde $r = r_1 + \frac{1}{2} d_0$ sein; wegen der Zunahme der Gewölbstärke nach den Kämpfern hin wird aber r gröfser.) Der Angriffspunkt von H liegt im Scheitel um $c = \frac{1}{3} d^2 : f$ über der Mitte (Fig. 292). Die Kantenpressungen, welche im Scheitel bei voller Belastung entstehen, werden daher (S. 144)

Fig. 292.

4) $$\sigma = \frac{H}{d_0}\left(1 \pm \frac{6\,c}{d_0}\right),$$

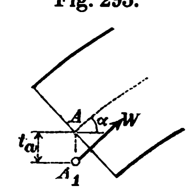
wobei das obere Zeichen für die Oberkante gilt.

Am Kämpfer bilde die Mittellinie den Neigungswinkel α mit der Wagerechten (Fig. 293), die Fuge annähernd denselben Winkel mit der Lothrechten. Der Kämpferdruck W ist in Wirklichkeit etwas steiler als die Mittellinie, doch ist dieser Unterschied nicht sehr erheblich, so dass man annähernd

$$W = H \sec \alpha$$

setzen kann. Der Angriffspunkt A_1 von W liegt um $t_a = 2\,c$ unter A, liefert also das Moment $M_a = W \cdot 2\,c \cos \alpha = H \cdot 2\,c$. Ist nun d_1 die Gewölbstärke am Kämpfer, so ergeben sich die Kantenpressungen daselbst bei voller Belastung zu

Fig. 293.



5) $$\sigma = \frac{H}{d_1 \cos \alpha} \mp \frac{6 \cdot H \cdot 2\,c}{d_1^2} = \frac{H}{d_1}\left(\sec \alpha \mp \frac{12\,c}{d_1}\right),$$

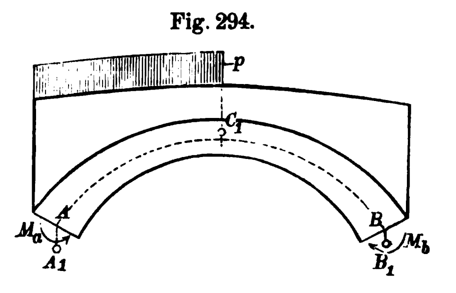
wobei das untere Zeichen für die Unterkante gilt.

Bedeckt die bewegliche Belastung nur einen Theil der Spannweite, so wird die Drucklinie unsymmetrisch, und es ist für ein Brückengewölbe wünschenswerth, dass der Spannungsmittelpunkt in keiner Fuge aus dem Kerne, dem mittleren Drittel, heraustrete, dass also auch die unsymmetrische Drucklinie in dem symmetrischen Kernbogen (welcher die mittleren Drittel aller Fugen umfasst) verbleibe. (Ueberschritte nämlich die Drucklinie bei einseitiger Belastung den Kernbogen, so würden sich, falls das Gewölbe ohne nennenswerthe Zugfestigkeit ist, die

betreffenden Fugen theilweise öffnen, bei anderer Laststellung sich aber wieder schliefsen — ein Vorgang, welcher bei häufiger Wiederholung dem Gewölbe schädlich werden könnte.)

Nach dem Winkler'schen Satze würde (ohne den Einfluss der Verkürzung, welche die Drucklinien steiler macht) auch bei unsymmetrischer Belastung die Drucklinie sich der Mittellinie möglichst anschmiegen. Lässt sich daher für jede Belastungsart eine statisch mögliche Drucklinie nachweisen, die ganz im Kernbogen bleibt, so ist ein Oeffnen der Fugen nicht zu befürchten. In Bezug auf letzterem Umstand ist mithin diejenige Belastung (nahezu) die ungünstigste, welche möglichst unsymmetrische Drucklinien erzeugt, und dieses findet genau genug statt, wenn die bewegliche Belastung die eine Hälfte der Spannweite bedeckt. Diese einseitige Belastung wird deshalb neben der vollen Belastung noch in Betracht zu ziehen sein (Fig. 294).

Fig. 294.



Für die Berechnung der Spannungen, welche diesem Zustande entsprechen, können wiederum annäherungsweise die für den parabolischen Bogenträger entwickelten Formeln benutzt werden. Zunächst ergiebt sich nach S. 271, dass an den Kämpfern die gröfsten Momente vorkommen, zu deren Berechnung die Gl. 22 u. 23 (S. 271) dienen. In diesen Gleichungen beziehen sich l und f auf die parabolische Mittellinie des Bogenträgers. Für diese ist der Krümmungshalbmesser im Scheitel $l^2:8f$, und es empfiehlt sich, für die hier vorliegende Aufgabe

$$\frac{l^2}{8f} = r \quad \text{oder} \quad l^2 = 8fr$$

zu setzen, wenn r den Krümmungshalbmesser der Mittellinie des Gewölbes im Scheitel bedeutet; g ist hier mit y_0 zu vertauschen. Gl. 21—24 (S. 271) werden dann

$$6) \qquad H_1 = \frac{r(y_0 + {}^1\!/_2\, p)}{1 + \zeta};$$

$$7) \qquad M_a = \frac{1}{8} pfr + \frac{2}{3} H_1 f \zeta;$$

8) $$M_b = -\frac{1}{8} p f r + \frac{2}{3} H_1 f \zeta;$$

9) $$M_0 = H_1 c = {}^1/_3 H_1 f \zeta.$$

Zieht man durch A und B Lothrechte, so geht die Drucklinie durch die Punkte A_1 bezw. B_1 derselben, und für die Abstände $A A_1 = t_a$ und $B B_1 = t_b$ gilt

10) $$t_a = \frac{M_a}{H} \qquad t_b = \frac{M_b}{H}.$$

In der Scheitelfuge bleibt der Spannungsmittelpunkt C_1 in derselben geringen Höhe:

11) $$c = \frac{1}{3} f \zeta = \frac{1}{3} \frac{d^2}{f}$$

über der Mitte wie im unbelasteten und vollbelasteten Zustande; die Scheitelfuge wird daher bei voller Belastung die stärkste Spannung erfahren, weil dann der Schub H am größten ist.

Bei einseitiger Belastung werden die Kantenpressungen im Scheitel

12) $$\sigma = \frac{H_1}{d_0}\left(1 \pm \frac{6\,c}{d_0}\right),$$

am belasteten Kämpfer, wenn man wieder annähernd $W = H_1 \sec \alpha$ einführt:

13) $$\sigma = \frac{H_1 \sec \alpha}{d_1} \mp \frac{6\,M_a}{d_1^2},$$

am unbelasteten Kämpfer

14) $$\sigma = \frac{H_1 \sec \alpha}{d_1} \mp \frac{6\,M_b}{d_1^2},$$

wobei sich die oberen Zeichen auf die Oberkante beziehen, und umgekehrt.

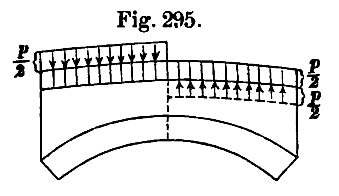
Am belasteten Kämpfer treten die größten Biegungsmomente auf. Stellt man die Bedingung, dass hier die kleinste Druckspannung Null werde, so muss

$$\frac{H_1 \sec \alpha}{d_1} - \frac{6\,M_a}{d_1^2} = 0 \qquad \text{oder}$$

15) $$d_1 = \frac{6\,M_a}{H_1 \sec \alpha} \qquad \text{sein.}$$

Der Umstand, dass die einseitige Belastung der einen Hälfte als ungünstigster Fall für das Gewölbe anzusehen ist, weist darauf hin, dass man die Mittellinie des Gewölbes (mithin auch die innere Leibung) zweckmäfsig nicht nach einer Drucklinie für das unbelastete Gewölbe formt, sondern besser nach einer solchen, welche einer Belastung der ganzen Spannweite mit $^1/_2\,p$, d. h. mit der Hälfte der beweglichen Last, entspricht. Aus dieser symmetrischen Belastung kann man sich nämlich die einseitige Belastung der Fig. 294 dadurch entstanden denken, dass (Fig. 295) auf der linken Hälfte eine positive (abwärts gerichtete) Last $^1/_2\,p$, auf der rechten Seite aber eine aufwärts gerichtete, negative Last $^1/_2\,p$ hinzugekommen ist. Hierdurch erfährt der Seitenschub H keine Aenderung, die Drucklinie aber verschiebt sich an zwei symmetrisch gelegenen Punkten um gleich viel, nämlich auf der belasteten Seite nach oben, auf der entlasteten nach unten. Die stärksten Abweichungen der Drucklinie von der Mittellinie werden also möglichst gering, wenn die Mittellinie einer Scheitelbelastung $y_0 + {}^1/_2\,p$ entspricht.

Fig. 295.



Legt man durch die drei Punkte, welche mittels der Gl. 10 und 11 gegeben sind, ein Seileck für den Zustand der einseitigen Belastung, so ist dieses wiederum als die Drucklinie anzusehen. Man prüfe dann zunächst, ob die Drucklinie irgendwo aus dem Kernbogen tritt und vergröfsere darnach nöthigenfalls die Gewölbstärke. Das zur Zeichnung des Seilecks erforderliche Krafteck giebt auch die Kräfte H_1 und W_1 genauer als die vorstehend benutzten Formeln.

Beispiel: Das Gewölbe einer Eisenbahnbrücke habe $l = 10^m$ Spannweite und $f = 3\,^1/_3{}^m$ Pfeilhöhe; die Scheitelstärke soll einstweilen zu $d_0 = 0{,}6^m$ angenommen werden. Uebermauerung (von der Dichtigkeit $\gamma_1 = 2000$) und Ueberschüttung (von der Dichtigkeit $\gamma = 1600$) seien so bemessen, dass die ganze, auf Mauerwerk von der Dichtigkeit $\gamma_1 = 2000$ zurückgeführte Belastungshöhe im Scheitel $1{,}4^m$ betrage. Die bewegliche Belastung soll zu $p = 1^m$ angenommen werden (Fig. 296).

Auf Grund des Vorstehenden wird die innere Leibung zunächst nach einer Hagen'schen Drucklinie mit $y_0 = 1{,}4^m + {}^1/_2 \cdot 1^m = 1{,}9^m$ Scheitelbelastung geformt; die Koordinaten dieser Linie sind schon auf S. 326 berechnet, wobei sich $r_1 = 4{,}72^m$ ergab. Für die Mittellinie gilt dann nach Gl. 3 (S. 341) annähernd $r = r_1 + d_0 = 4{,}72 + 0{,}6 = 5{,}32^m$. Die Pfeilhöhe der

Mittellinie ist nahezu gleich derjenigen der inneren Leibung. Für den Neigungswinkel der Mittellinie am Kämpfer gilt nach S. 323:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - y_0^2}}{\sqrt{r_1 y_0}} = \frac{\sqrt{(y_0 + f)^2 - y_0^2}}{\sqrt{r_1 y_0}} = \frac{\sqrt{2 f y_0 + f^2}}{\sqrt{r_1 y_0}},$$

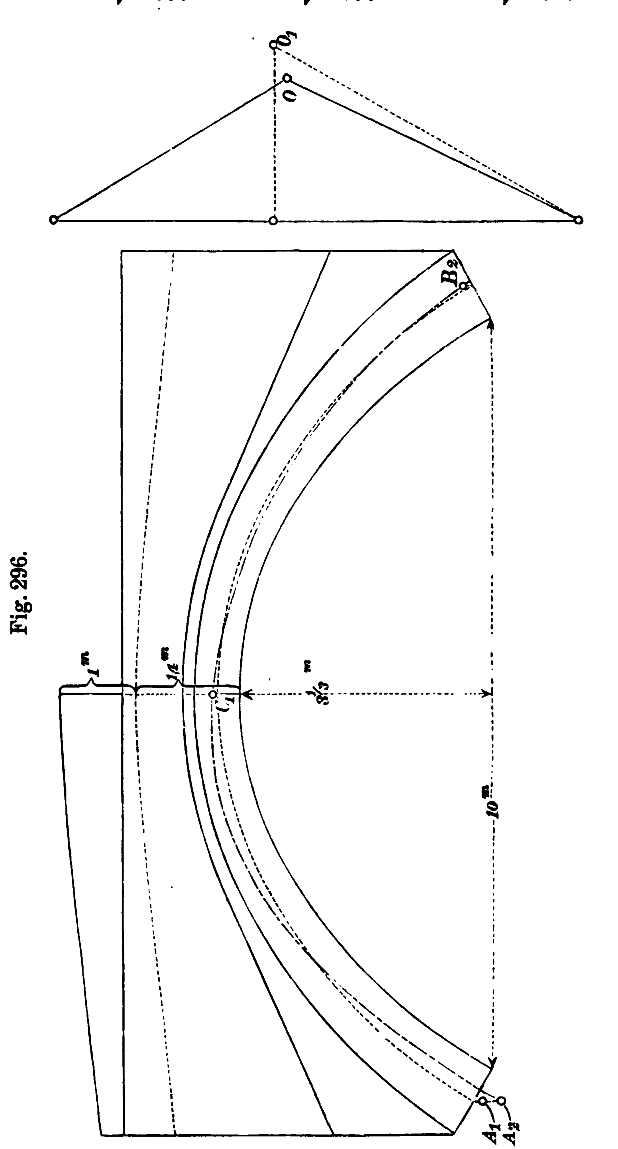


Fig. 296.

wobei $y_0 = 1{,}9^m$ zu setzen ist,

$$\text{also} \quad tg^2 \alpha = \frac{2 \cdot 3\,1/_3 \cdot 1{,}9 + 11\,1/_9}{5{,}32 \cdot 1{,}9} = 2{,}35\,,$$

$$\sec^2 \alpha = 3{,}35\,, \quad \sec \alpha = 1{,}83\,.$$

Die Gewölbstärke am Kämpfer wird dann vorläufig nach Gl. 1 (S. 340) $d_1 = 1{,}83 \cdot 0{,}6 = 1{,}098$, wofür rund $d_1 = 1^m$ gewählt ist. Hiernach kann als mittlere Stärke $d = 0{,}8^m$ gesetzt werden, und man erhält nach Gl. 1 und 2 (S. 337)

$$\zeta = \frac{d^2}{f^2} = \left(\frac{0{,}8}{3\,1/_3}\right)^2 = 0{,}058 \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}\,\frac{0{,}8^2}{3\,1/_3} = 0{,}064^m\,.$$

Für volle Belastung wird nach Gl. 2—5 (S. 340 u. 341)

$$H = \frac{5{,}32 \cdot 2{,}4}{1{,}058} = 12{,}07^{cbm};$$

Dann sind die Kantenpressungen im Scheitel:

$$\sigma = \frac{12{,}07}{0{,}6}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 0{,}064}{0{,}6}\right) = \begin{cases} 32{,}99^m = 6{,}5^{at} \\ 7{,}24^m = 1{,}4^{at}, \end{cases}$$

diejenigen am Kämpfer:

$$\sigma = \frac{12{,}07}{1}\left(1{,}83 \mp \frac{12 \cdot 0{,}064}{1}\right) = \begin{cases} 12{,}82^m = 2{,}6^{at} \\ 31{,}36^m = 6{,}3^{at}. \end{cases}$$

Für einseitige Belastung gilt nach Gl. 6—15 (S. 342 u. 343):

$$H_1 = \frac{5{,}32 \cdot 1{,}9}{1{,}058} = 9{,}55^{cbm}\,,$$

$$M_a = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot \frac{10}{3} \cdot 5{,}32 + \frac{2}{3} \cdot 9{,}55 \cdot \frac{10}{3} \cdot 0{,}058$$

$$= 2{,}217 + 1{,}231 = 3{,}448\,,$$

$$M_b = -\,2{,}217 + 1{,}231 = -\,0{,}986\,,$$

$$t_a = 0{,}354^m, \quad t_b = -\,0{,}109^m, \quad c = 0{,}064^m.$$

Die Kantenpressungen im Scheitel sind dann

$$\sigma = \frac{9{,}55}{0{,}6}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 0{,}064}{0{,}6}\right) = \begin{cases} 26{,}10^m = 5{,}2^{at} \\ 5{,}73^m = 1{,}1^{at}, \end{cases}$$

die Kantenpressungen am belasteten Kämpfer:

$$\sigma = 9{,}55 \cdot 1{,}83 \mp 6 \cdot 3{,}448 = 17{,}477 \mp 20{,}688 = \begin{cases} -\;\;3{,}21^m = -\,0{,}6^{at} \\ +\,38{,}17^m = +\,7{,}6^{at}. \end{cases}$$

Sollte die ganze Kämpferfuge Druckspannung erhalten, so müsste

$$d_1 = 20{,}688 : 17{,}477 = 1{,}18^m$$

gemacht werden.

Etwas genauere Werthe ergeben sich, wenn man die Zeichnung zu Hülfe nimmt. Diese liefert $r = 5{,}55^m$; auch zeigt sich die Pfeilhöhe der Mittellinie etwas größer, nämlich $f_1 = 3{,}4^m$ (statt $3\,1/_3$).

Zeichnet man dann ein Seileck zu der symmetrischen, vollen Belastung, welches im Scheitel um $0{,}064^m$ oberhalb (Punkt C_1), am Kämpfer um $2 \cdot 0{,}064 = 0{,}128^m$ unterhalb der Mittellinie (auf der Lothrechten durch die Mitte der Kämpferfuge gemessen) liegt (Punkt A_1), so kann man aus dem zugehörigen Kraftеck (Pol O_1 in Fig. 296) $H = 11{,}6$ cbm und $W = 23{,}45$ cbm abmessen. Daraus entsteht am Scheitel

$$\sigma = \frac{11{,}6}{0{,}6}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 0{,}064}{0{,}6}\right) = \begin{cases} 31{,}70^m = 6{,}3^{at} \\ 6{,}96^m = 1{,}4^{at}, \end{cases}$$

am Kämpfer

$$\sigma' = 23{,}45 \mp 12 \cdot 11{,}6 \cdot 0{,}064 = \begin{cases} 14{,}09^m = 2{,}8^{at} \\ 31{,}91^m = 6{,}4^{at}. \end{cases}$$

Die Abweichungen von der ersten Berechnung sind unerheblich.

Schließlich zeichne man ein Seileck für die einseitige Belastung durch die 3 Punkte A_2, C_1 und B_2; darin ist C_1 ein Punkt der Scheitelfuge, welcher um $0{,}064^m$ über der Mitte liegt, A_2 ein Punkt, der um $A A_2 = t_a = 0{,}354^m$ unterhalb der Mitte des belasteten Kämpfers, B_2 ein solcher, der um $B B_2 = -t_b = 0{,}109^m$ oberhalb der Mitte des unbelasteten Kämpfers liegt. Aus dem zugehörigen Kraftеck (Pol O) sind dann $H_1 = 9{,}5$ und $W_1 = 21{,}6$ abzumessen. Danach ist im Scheitel

$$\sigma = \frac{9{,}5}{0{,}6}(1 \pm 0{,}64) = \begin{cases} 25{,}97^m = 5{,}2^{at} \\ 5{,}70^m = 1{,}1^{at}; \end{cases}$$

ferner wird $\quad M_a = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 3{,}4 \cdot 5{,}55 + \frac{2}{3} \cdot 9{,}5 \cdot 3{,}4 \cdot 0{,}058 = 3{,}608, \quad$ daher am Kämpfer

$$\sigma = 21{,}6 \mp 6 \cdot 3{,}608 = \begin{cases} -\ 0{,}048^m = -0{,}1^{at} \\ +\ 43{,}248^m = +8{,}6^{at}. \end{cases}$$

Die Kämpferstärke müsste

$$d_1 = 21{,}648 : 21{,}6 = 1{,}002^m$$

betragen, wenn die ganze Fuge gedrückt werden sollte; das ursprünglich gewählte Maß $d_1 = 1{,}0^m$ genügt also.

Aus diesem Seileck erkennt man auch noch, dass auf der belasteten Seite, u. zw. in etwa 1¼ Meter Abstand von der Mitte, die Drucklinie um etwa $0{,}016^m$ aus dem Kernbogen nach oben hinaus rückt. Die Gewölbstärke beträgt an dieser Stelle etwa $0{,}63^m$, die halbe Kernstärke demnach $0{,}105^m$. Der Fugendruck hat hier den Werth 10 mit einem Momente $M = 1{,}15$. Die Kantenpressungen werden also

$$\sigma = \frac{10}{0{,}63} \pm \frac{6 \cdot 1{,}15}{0{,}63^2} = \begin{cases} 41{,}97^m = 8{,}4^{at} \\ -10{,}23^m = -2{,}0^{at}. \end{cases}$$

Soll auch diese Fuge in der ganzen Ausdehnung Druck erfahren, so muss die Gewölbstärke hier von $0{,}63^m$ auf $d = 6 \cdot 1{,}15 : 10 = 0{,}69^m$, dementsprechend im Scheitel von $0{,}6^m$ auf rund $0{,}66^m$ vergrößert werden. (Das Moment $M = 1{,}15$ ist erheblich kleiner als das Kämpfermoment $M_a = 3{,}608$. Dass es besondere Berücksichtigung noch erfordert, rührt davon her, dass die Gewölbstärke hier so bedeutend geringer war als am Kämpfer.) Dieses

Beispiel bestätigt also, dass die Gleichung $d \cos \vartheta = d_0$ für Brückengewölbe (vgl. S. 340) nur sehr beschränkten Werth hat.

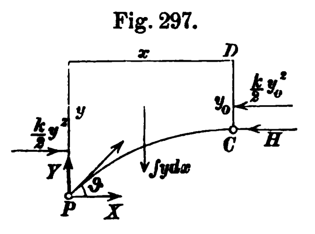
Durch Formänderungen des Lehrgerüstes, durch Temperatur-Aenderungen und durch Nachgeben der Widerlager entstehen noch weitere Einwirkungen auf das Gewölbe, welche man Störungen nennt. Man sucht den ungünstigen Einflüssen derselben durch die Art der Herstellung entgegenzuwirken.

X. Drucklinie für Erdbelastung.

In den vorstehenden Untersuchungen wurden rein lothrechte Belastungen vorausgesetzt. Bei Gewölben größerer Pfeilhöhe mit Erdüberschüttung ist aber auch der Seitendruck der Erde zu berücksichtigen, und es soll im Folgenden die Drucklinie für diese Belastungsart behandelt werden. Das Gewölbe selbst liefert für die Drucklinie nur eine lothrechte Belastung; doch soll auf diesen Unterschied gegenüber der Erdschüttung keine Rücksicht genommen, das Gewölbe vielmehr als eine gewichtlose Kette aufgefasst werden.

Die obere Begrenzung sei wagerecht und liege in der Höhe y_0 über dem Scheitel (Fig. 297); dann ist, wenn wir (wie bei Hagen's Drucklinie) den Punkt D zum Ursprunge nehmen und die Dichtigkeit γ der Erde zur Krafteinheit wählen, $\int y\,dx$ das Erdgewicht, welches auf dem Stücke CP der Drucklinie lastet. Bezüglich der Erdpressungen an den lothrechten Schnittebenen durch C und P wird die ziemlich wahrscheinliche Annahme gemacht, dass sie sich ebenso verhalten wie beim unbegrenzten Erdkörper im unteren Grenzzustande; die Pressungen sind daher (nach S. 307) wagerecht, haben (nach S. 280) die Größen $\frac{1}{2} k y^2$ und $\frac{1}{2} k y_0^2$ [wo $k = \mathrm{tg}^2 (45^0 - \frac{1}{2} \varphi)$] und greifen in den unteren Drittelspunkten an. In C wirkt eine Spannkraft H, während im Punkte P die Kraft in X und Y zerlegt ist. Es gelten dann die Gleichungen

Fig. 297.



$$X = H - \tfrac{1}{2} k (y^2 - y_0^2),$$

$$Y = \int_0^x y\,dx,$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{\int_0^x y\,dx}{X} = \frac{\int_0^x y\,dx}{H - \frac{1}{2}k(y^2 - y_0^2)}, \qquad \text{also}$$

$$[H - \tfrac{1}{2}k(y^2 - y_0^2)]\frac{dy}{dx} = \int_0^x y\,dx.$$

Zur Beseitigung des Integralzeichens wird von beiden Seiten die Abgeleitete nach x gebildet:

$$1)\qquad [H - \tfrac{1}{2}k(y^2 - y_0^2)]\frac{d^2y}{dx^2} - ky\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y.$$

Durch geeignete Ordnung der Glieder, sowie nach Multiplikation mit $2k\,dy$ entsteht dann

$$\frac{2k\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx}}{1 + k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = -2\,\frac{-ky\,dy}{H - \frac{1}{2}k(y^2 - y_0^2)}.$$

Nun sind auf beiden Seiten die Zähler die Differentiale der Nenner, so dass die Integration auf

$$\mathrm{l}\left[1 + k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = -2\,\mathrm{l}\,[H - \tfrac{1}{2}k(y^2 - y_0^2)]\,C$$

führt. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C bedenke man, dass für den Scheitel

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } y = y_0, \text{ so dass } \mathrm{l}\,1 = 0 = -2\,\mathrm{l}\,(HC)$$

wird. Durch Abziehen dieser Gleichung von der vorhergehenden und nach Entfernung der Logarithmenzeichen ergiebt sich dann

$$2)\qquad 1 + k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{H^2}{[H - \frac{1}{2}k(y^2 - y_0^2)]^2} = \frac{H^2}{X^2},$$

$$3)\qquad \text{also} \quad X = \frac{H}{\sqrt{1 + k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Die Gleichung 2 ist in geschlossener Form nicht weiter integrirbar; man kann daher die Gleichung der Drucklinie nicht entwickeln, wohl aber die Krümmungshalbmesser ρ derselben als Funktion des Neigungswinkels ϑ der Kurve berechnen.

Allgemein ist

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{\sec^3 \vartheta}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Aus Gl. 1 ergiebt sich ferner

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y(1 + k \operatorname{tg}^2 \vartheta)}{X},$$

woraus nach Gl. 3 wird:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y(1 + k \operatorname{tg}^2 \vartheta)^{3/2}}{H}, \qquad \text{also}$$

$$\rho = \frac{H \sec^3 \vartheta}{y(1 + k \operatorname{tg}^2 \vartheta)^{3/2}} = \frac{H}{y(\cos^2 \vartheta + k \sin^2 \vartheta)^{3/2}} = \frac{H}{y[1 - (1 - k)\sin^2 \vartheta]^{3/2}}.$$

Nennt man wieder den Krümmungshalbmesser im Scheitel r, so entsteht für $\vartheta = 0$: $r = \frac{H}{y_0}$; es ist also, wie bei der Drucklinie mit rein lothrechter Belastung (Gl. 3, S. 315)

$$H = r\, y_0. \tag{4}$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung für ρ erhält man dann

$$\rho = \frac{r\, y_0}{y[1 - (1 - k)\sin^2 \vartheta]^{3/2}}. \tag{5}$$

Jetzt muss noch die in Gl. 5 vorkommende Gröfse y als Funktion von ϑ ausgedrückt werden. Gl. 2 giebt aber, nach y aufgelöst, wenn man zugleich H mit $r\, y_0$ vertauscht:

$$y = y_0 \sqrt{1 + \frac{2}{k} \frac{r}{y_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k \operatorname{tg}^2 \vartheta}}\right]},$$

also nach Gl. 5

$$\frac{\rho}{y_0} = \frac{r/y_0}{[1 - (1 - k)\sin^2 \vartheta]^{3/2} \sqrt{1 + \frac{2}{k} \frac{r}{y_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k \operatorname{tg}^2 \vartheta}}\right]}}. \tag{6}$$

Für $\varphi = 30^0$ ist $k = 1/3$, für $\varphi = 36^0 40'$ ist $k = 1/4$. Bei gegebenem k und bestimmtem r/y_0 liefert Gl. 6 die Gröfse ρ/y_0 als Funktion von ϑ, so dass man mittels dieser Gleichung die Drucklinie annäherungsweise aus kleinen Kreisbögen zusammensetzen kann.

Unter der Annahme, dass sich die Spannkräfte gleichmäßsig über den Querschnitt vertheilen, wird die Spannung im Scheitel $H:d_0$, diejenige an beliebiger Stelle $X \sec \vartheta : d$, wenn d_0 und d die betreffenden Gewölbstärken sind. Für gleiche Spannung muss dann $\frac{d}{d_0} = \frac{X \sec \vartheta}{H}$ werden und nach Gl. 3:

$$7) \qquad \frac{d}{d_0} = \frac{\sec \vartheta}{\sqrt{1 + k \operatorname{tg}^2 \vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - k)\sin^2 \vartheta}}.$$

Bei dieser Belastung durch Erde wird die wagerechte Spannkraft $X = H - \frac{1}{2} k (y^2 - y_0^2)$ mit wachsendem y kleiner und ist an einer bestimmten Stelle gleich Null. Hier ist dann die Richtung der Drucklinie lothrecht, $\vartheta = 90^0$; nennt man die Gewölbstärke an dieser Stelle d_1, so wird nach Gl. 7

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{also für} \quad k = \frac{1}{4}: \ \frac{d_1}{d_0} = 2.$$

Für Wasserbelastung oder $k = 1$ geht Gl. 5 über in

$$\rho = \frac{r y_0}{y} \quad \text{oder} \quad \rho y = r y_0, \qquad \text{d. h.}$$

die Krümmung nimmt proportional der Tiefe zu, während Gl. 7 liefert $\qquad d = d_0$.

Die Drucklinie hat die Form der Fig. 298.*)

Fig. 298.

Ist die Tiefe y_0 des Scheitels unter dem Wasserspiegel sehr grofs gegen die Höhenerstreckung der Drucklinie, so kann $y = y_0$ angesehen werden, und es wird dann $\rho = r$, die Drucklinie also ein Kreis.

Annäherungs-Gleichung der Drucklinie für Erdbelastung, nach L. Dyrſsen.**) Die Momentengleichung führt unmittelbar zur Gleichung der Drucklinie, wenn man sich entschliefst, das Gewicht des Erdkörpers CPQ (Fig. 299) so in die Rechnung einzuführen, als wäre der Bogen CP eine Parabel. Zählt man die Koordinaten vom Scheitel C aus, so ist die Fläche des Parabeldreiecks

$$CPQ = \frac{1}{3} x y$$

---

*) Vgl. A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik, 1. Aufl., S. 376.

**) Profilformen und Abmessungen von Bauwerken in höheren Dämmen, von L. Dyrſsen; Zeitschrift für Bauwesen, 1884, S. 457.

mit dem Schwerpunkts-Abstande $\frac{1}{4}x$ von P. Nennt man die Scheitel-Ueberschüttung z_0, so gilt nach der Figur in Bezug auf P

$$Hy = \frac{k}{6}[(z_0+y)^3 - z_0^2(z_0+3y)] + \frac{z_0 x^2}{2} + \frac{1}{3}xy\cdot\frac{x}{4},$$

also wird

$$1)\quad x^2 = \frac{Hy - \frac{1}{6}ky^2(3z_0+y)}{\frac{1}{2}z_0 + \frac{1}{12}y} = \frac{2y[6H - ky(3z_0+y)]}{6z_0+y}.$$

Sind für einen bestimmten Punkt $x = \frac{1}{2}l$ und $y = f$ gegeben, so ergiebt sich daraus

$$2)\quad H = \frac{l^2}{8}\left(\frac{z_0}{f}+\frac{1}{6}\right) + \frac{k}{2}f^2\left(\frac{z_0}{f}+\frac{1}{3}\right).$$

Fig. 299.

Beispiel: Für $k = \frac{1}{4}$; $l = 10^{\text{m}}$; $f = 7{,}5^{\text{m}}$; $z_0 = 10^{\text{m}}$ wird $H = 30{,}496$ und

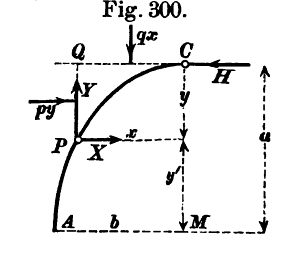
$$x^2 = \frac{y[365{,}628 - \frac{1}{2}y(30+y)]}{60+y}.$$

Damit erhält man folgende Koordinaten

$y =$ 0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
$x =$ 1,72	2,40	3,28	3,88	4,31	4,62	4,84	4,97	5,01.

Drucklinie für Erdbelastung bei sehr grofser Ueberschüttungshöhe. Ist z_0 sehr grofs gegenüber der Höhenausdehnung der Drucklinie, so kann für die Ermittelung der Last und des Seitendruckes die Tiefe z eines Punktes gleich z_0 gesetzt werden. Dann ist der lothrechte Druck auf eine wagerechte Ebene $q = z_0$, der wagerechte Druck auf eine lothrechte Ebene $p = k z_0$. Unter Vernachlässigung des Gewichts des Erdkörpers CPQ (Fig. 300) lautet dann die Momentengleichung in Bezug auf P:

Fig. 300.



$$1)\qquad Hy = \tfrac{1}{2}qx^2 + \tfrac{1}{2}py^2.$$

Ferner ist

$$2)\qquad X = H - py,$$

$$3)\qquad Y = qx \quad \text{und}$$

$$4)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H-py}.$$

Die Drucklinie steht lothrecht für $dy:dx = \infty$, d. h. für

$H - p\,y = 0$. Der hieraus folgende Werth von y werde a genannt, sodass

$$5)\qquad H = p\,a.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so ergiebt sich

$$2\,p\,a\,y = q\,x^2 + p\,y^2.$$

Dies ist die Scheitelgleichung einer Ellipse. Vertauscht man nämlich y mit $a - y'$, so entsteht

$$6)\qquad \left(\frac{y'}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{p/_q\, a^2} = 1.$$

Die wagerechte Halbachse ist

$$7)\qquad b = a\sqrt{p/_q} = a\sqrt{k}.$$

Für $x = b$ (im Punkte A) muss $X = 0$ sein; zugleich ist (nach Gl. 3) $Y = qb$; dies stellt die gesammte Spannkraft im Punkte A dar. Die Spannkräfte bei A und C haben also das Verhältnis $q\,b : H$, oder (nach Gl. 5)

$$q\,b : p\,a = q\,a\sqrt{k} : q\,k\,a = 1 : \sqrt{k}.$$

Für die Gewölbstärken bei A und C bekommt man also wieder (wie auf S. 351)

$$d_1 : d_0 = 1 : \sqrt{k}.$$

Für $k = 1/4$ ist der Seitendruck p ein Viertel des lothrechten Druckes, das Achsenverhältnis der Ellipse $a : b = 2$ und $d_1 : d_0 = 2$.

Für Wasser ist $k = 1$, also $p = q$, $a = b$ und $d_1 = d_0$.

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Stellen des Buches.

A Auflagerdruck des linken Endauflagers (S. 38);
„ lothrechter Kämpferdruck am linksseitigen Auflager eines Bogenträgers (S. 264);
A und B konjugirte Halbmesser der Centralellipse (S. 28);
B Auflagerdruck des rechten Endauflagers (S. 38);
„ lothrechter Kämpferdruck am rechten Auflager eines Bogenträgers (S. 265);
C Centrifugalmoment einer Fläche (S. 20);
„ Auflagerdruck an einer Mittelstütze eines Balkens (S. 47, 83);
D Spannkraft in einer Strebe (Diagonalen) eines Fachwerks (S. 164);
„ aktiver Erddruck gegen eine Wand (S. 280);
D_1 passiver Erddruck oder Erdwiderstand (S. 282);
D Gesammtdruck in einer Fuge eines Gewölbes (S. 331);
E Elasticitätsziffer (S. 10);
F Querschnittsfläche eines Stabes oder Bogenträgers (S. 208, 225);
F_1 Querschnitt der Spannstange eines Bogens (S. 232, 251);
F_M Momentenfläche (S. 36);
$F(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ (zur Kettenlinie) (S. 318);
G Gleitmodul (S. 13);
„ ständige Knotenpunktslast (S. 176);
„ Gewicht einer Stützmauer (S. 299);
H wagerechte Seitenkraft in einem Trägergurt (S. 123);
„ Seitenschub eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 213, 232, 243, 251, 265, 340);
„ wagerechte Spannkraft im Scheitel einer Ketten- oder Drucklinie (S. 314).
H_t Temperaturschub eines Bogenträgers (S. 240, 252, 271);
J Trägheitsmoment, J_1 und J_2 Haupt-Trägheitsmomente (S. 19, 20);
K Kraft (S. 25);
„ wagerechte Einzellast an einem Bogenträger (S. 246);
L gesammte Trägerlänge (S. 96);
„ Formänderungs-Arbeit eines Trägers (S. 254, 257);

M Biegungsmoment (S. 33);
M_1, M_2, M_n Stützenmomente (S. 43, 79);
M' das „einfache" Moment (S. 79, 214, 229, 236);
M_0 Scheitelmoment eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 269, 271, 343);
M_a und M_b Einspannungsmomente eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 261, 265, 342);
N Längskraft, Normalkraft für einen Querschnitt (S. 17, 221, 225);
O Spannkraft im Obergurt eines Trägers (S. 119, 164, 213);
P Einzellast (S. 38), besonders auch bewegliche Knotenpunktslast (S. 176);
Q Querkraft in einem Schnitte (S. 17, 238);
Q' die „einfache" Querkraft (S. 83, 106);
S statisches Moment des Querschnittstheiles auf der einen Seite der Nulllinie in Bezug auf diese (S. 56, 158);
„ Spannkraft eines Stabes bezw. einer Ketten- oder Drucklinie an beliebiger Stelle (S. 198, 318);
S' Spannkraft eines Fachwerkstabes in Folge einer Last Eins in bestimmter Richtung (S. 206, 250);
S_0 Spannkraft eines Stabes in einem Bogenfachwerke für den „Zustand $H = 0$" (S. 250);
U Spannkraft im Untergurt eines Trägers (S. 119, 164, 213);
V Spannkraft in einem Ständer (einer Vertikalen) eines Fachwerks (S. 164, 177);
W und W_1 Widerlager- (Kämpfer-) Drücke eines Bogenträgers oder Gewölbes (S. 212, 331);
X wagerechte Spannkraft an beliebiger Stelle einer Drucklinie für Erdbelastung (S. 348);
Y Wandscheerkraft eines Trägers (S. 119, 213, 216);

a große Halbachse einer Ellipse (S. 353);
„ erster Haupt-Trägheitshalbmesser (S. 25);
„ Abstand einer Last vom linken Auflager (S. 38, 79);
„ Stück eines Gerber'schen Trägers (S. 109);
„ diejenige Strecke der linken Auflager-Lothrechten eines Trägers, welche zwischen den Gurtrichtungen einer Schnittstelle liegt (S. 121, 174);
b kleine Halbachse einer Ellipse (S. 353);
„ zweiter Haupt-Trägheitshalbmesser (S. 25);
„ Abstand einer Last vom rechten Auflager (S. 38, 79);
„ Stück eines Gerber'schen Trägers (S. 109);
„ diejenige Strecke der rechten Auflager-Lothrechten eines Trägers, welche zwischen den Gurtrichtungen einer Schnittstelle liegt (S. 121, 174);
c Senkung der Mittelstütze eines Balkens (S. 47, 87);
„ Hebelarm des Widerstandsmomentes Nc eines Querschnittes (S. 57);
„ Stück eines Gerber'schen Trägers (S. 109);
„ Excentricität einer Druckkraft (S. 139, 221);
„ Länge einer Einflussstrecke (S. 199);
„ Höhe des Spannungsmittelpunktes der Scheitelfuge eines Bogenträgers oder Gewölbes über der Mitte der Fuge (S. 269, 271, 337);
„ Scherfestigkeit (Kohäsion) eines Erdkörpers (S. 273, 277);

d Stück eines Gerber'schen Trägers (S. 109);
" Länge einer Fachwerkstrebe (S. 180, 188);
" Breite einer Widerlagerfuge (S. 221);
" untere Stärke einer Stützmauer (S. 300);
" Gewölbstärke an beliebiger Stelle (S. 337);
d_0 Gewölbstärke im Scheitel (S. 338):
d_1 Gewölbstärke am Kämpfer (S. 341) bezw. an derjenigen Stelle eines Erddruckgewölbes, wo die Mittellinie lothrecht steht (S. 353);
ds Bogentheilchen einer Kurve (Mittellinie eines Stabes oder Bogenträgers) (S. 225);
$d\varphi$ Kontingenz- oder Centriwinkel eines Bogentheilchens ds (S. 225);
e Abstand der am stärksten gespannten Stelle eines Querschnittes von der Biegungsachse (S. 33);
" Höhe des Angriffspunktes des Erddrucks über der Unterkante der Wand (S. 280, 289, 291);
f Durchbiegung (S. 36);
" Pfeilhöhe eines Bogens oder Gewölbes (S. 213, 337);
g ständige Belastung der Längeneinheit (S. 47, 326);
h Trägerhöhe an irgend einer Stelle (S. 119, 168);
" Höhe einer Stützwand (S. 279);
h_0 freie lothrechte Standhöhe eines Erdkörpers (S. 277);
h_1 Ueberhöhung eines Erdkörpers (S. 286);
h_m Trägerhöhe in der Mitte einer Spannweite (S. 123, 179);
i Trägheits-Halbmesser (S. 25, 136);
k Kernhalbmesser (S. 144);
" Anzahl der Knotenpunkte eines Fachwerks (S. 166);
$k = 2D : h^2$ beim Erddruck (S. 280, 348);
l Spannweite eines Trägerfeldes (S. 38);
" Länge eines Stabes (S. 132);
mE Querelasticitäts-Ziffer (S. 11);
m Hülfsgröfse (Erddruck) (S. 287);
$n = g : p$, Verhältnis der ständigen zur beweglichen Last (S. 182);
p Belastung der Längeneinheit (S. 34), besonders b e w e g l i c h e Belastung (S. 47);
" Erddruck auf die Höheneinheit einer Wand (S. 281);
q volle Last der Längeneinheit (S. 87);
" Belastung eines Erdkörpers für die Flächeneinheit des Grundrisses (S. 275);
" Gewicht der Bogeneinheit einer Kette (S. 315);
r Hülfsgröfse (Knickfestigkeit) (S. 132);
" Abstand des Schnittpunktes der Gurtrichtungen (an einer Schnittstelle eines Trägers) vom u n b e l a s t e t e n Knotenpunkte des durchschnittenen Faches (S. 204);
" Halbmesser eines Kreisbogens (S. 242);
" Krümmungshalbmesser im Scheitel einer Ketten- oder Drucklinie (S. 315);
s Anstrengung (S. 16);

s Anzahl der Stäbe eines Fachwerks (S. 166);
„ Länge eines Fachwerkstabes (S. 206);
t Abstand einer Druckkraft von der Kante einer Mauerfuge (S. 155, 221);
„ Temperaturzunahme eines Bogens (S. 239);
t_a und t_b Tiefe des an den Kämpfern wirkenden Seitenschubes H eines Bogenträgers oder Gewölbes unter den Mitten der Kämpferfugen (S. 265, 343);
u Abstand eines Querschnittstheilchens von der Biegungsachse (S. 30);
„ Abstand einer Last vom linken Auflager (S. 50, 230);
$u = x : r$ Hülfsgröße (Kettenlinie) (S. 318);
u' Abstand einer Last vom rechten Auflager (S. 72);
$v = l_2 : l_1$ Verhältnis zweier Spannweiten (S. 95);
„ Abstand der Nulllinie von der Biegungsachse (S. 131);
„ Verrückung eines Trägerpunktes in einer bestimmten Richtung (S. 207, 254);
w Abstand des Schnittpunktes der Gurtrichtungen (an einer Schnittstelle eines Trägers) von der linken Auflager-Lothrechten (S. 120, 203) bezw. von der Lothrechten des unbelasteten Auflagers (S. 204);
x_0 Abscisse der Stelle eines Balkens auf 2 Stützen, wo die kleinste Querkraft gleich Null (S. 76);
„ Abscisse eines Festpunktes (S. 102);
y_0 Belastungshöhe im Scheitel (bei wagerechter Belastungslinie) (S. 323);
z Abstand eines Querschnittstheilchens von der Biegungsachse (S. 55);
„ Breite des wirksamen Theiles einer Fuge (S. 155);
„ Ordinate der Kämpferdrucklinie eines Bogenträgers (S. 233, 244, 266);
„ Belastungshöhe einer Ketten- oder Drucklinie (S. 313);
z_0 Belastungshöhe im Scheitel einer Ketten- oder Drucklinie (S. 315);

Δds Vergrößerung des Bogentheilchens ds (S. 225);
$\Delta d\varphi$ Vergrößerung des Kontingenz- oder Centriwinkels eines Bogentheilchens (S. 225);
Δh Einfluss der Belastung eines Erdkörpers auf dessen zulässige Höhe (S. 276);
Δl Vergrößerung der Spannweite l eines Bogenträgers (S. 229);
Δs Verlängerung eines Stabes von der Länge s (S. 207);

α Biegungswinkel (S. 35);
„ Knickziffer (S. 136);
„ Neigungswinkel eines Bogens oder einer Drucklinie am Kämpfer (S. 242, 341);
„ Neigungswinkel der unteren Böschung oder der Stützwand eines Erdkörpers (S. 275, 286);
β Neigungswinkel der Verbindungs-Geraden zweier benachbarten Stützpunkte eines Balkens (S. 79);
„ Neigungswinkel der oberen Böschung eines Erdkörpers (S. 275);
γ Gleitung (S. 13);
„ Dichtigkeit (Gewicht von 1 cbm) eines Erdkörpers (S. 274);
γ_1 Dichtigkeit des Mauerwerks (S. 300, 338);

δ Stärke der Mittelrippe eines I-Trägers (S. 60);
" Neigungswinkel einer Strebe D eines Fachwerks (S. 164);
" unbestimmte Abweichung des Erddruckes D von der Normalen zur Wand (S. 294);
ε Dehnung (S. 11);
" Wärmedehnung (S. 240);
$\varepsilon = \alpha + 2\varphi$ Hülfsgröße (Erddruck) (S. 286);
ζ kleine Verhältniszahl, welche die Einwirkung der Verkürzung der Mittellinie eines Bogens oder Gewölbes, sowie der Verlängerung der Spannstange eines Bogens darstellt (S. 232, 243, 265, 337);
η Einfluss-Ordinate (S. 73, 172);
ϑ Neigungswinkel eines kreisförmigen Bogens an einer Laststelle (S. 242);
" Neigungswinkel einer Ketten- oder Drucklinie an beliebiger Stelle (S. 314);
" Neigungswinkel der Gleitebene eines Erdkörpers (S. 275);
λ Länge eines Faches im Fachwerke (S. 173);
μ Multiplikator einer Einflussfläche (S. 101, 214);
ν Neigungswinkel des Untergurts eines Trägers (S. 119, 164);
ξ Abscisse des Schwerpunktes der Momentenfläche F_M (S. 36);
ρ Krümmungshalbmesser der Biegungslinie (S. 30);
" Krümmungshalbmesser einer Ketten- oder Drucklinie an beliebiger Stelle (S. 315);
σ Zug- oder Druckspannung (Normalspannung) f. d. Flächeneinheit (S. 2);
σ_1, σ_2, σ_3 Hauptspannungen (S. 9, 65);
σ' und σ'' stärkste Zug- und Druckspannung an einem Querschnitte (S. 33, 235, 301), Spannungshöhe (S. 302);
τ Schubspannung (S. 2);
τ_0 wagerechte und lothrechte Schubspannung in der Achse eines Balkens (S. 57);
φ Reibungswinkel (S. 222);
" natürlicher Böschungswinkel eines Erdkörpers (S. 272);
ψ Hülfsgröße (Brückenträger auf mehreren Stützen) (S. 89, 96);
ω Neigungswinkel des Obergurts eines Trägers (S. 119, 164).

Berichtigungen.

Auf S. 29, Zeile 3 von oben soll es statt $\sin\beta \int dFy^2$ heifsen: $\sin^2\beta \int dFy^2$.
Auf S. 36 soll es in Gl. 6 statt FJf heifsen: EJf.
Auf S. 64, Zeile 2 von unten soll es statt $\pm$ heifsen: $\mp$.
Auf S. 70, Zeile 9 von unten soll es statt $\frac{Q}{e}$ heifsen: $\frac{Q}{c}$.
Auf S. 73, Zeile 2 von unten ist nach dem Worte Hannover nachzufügen: 1880, S. 219 und 480.
Auf S. 120, Zeile 10 von oben soll es statt Gurtkräfte O und M heifsen: Gurtkräfte O und U.
Auf S. 122, in Fig. 111 ist die lothrechte Schraffirung des kleinen Dreieckes unter $A_1 C_1$ nachzufügen.
Auf S. 127, Zeile 5 von oben soll es statt weit heifsen: weil.
Auf S. 144, Zeile 1 von oben soll es statt e heifsen: c.
Auf S. 156, Zeile 12 von oben soll es statt $z = t$ heifsen: $z = 3t$.



